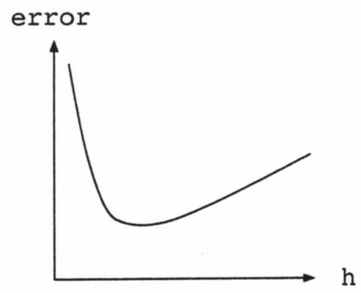
博 士 班 入 學 考

題目共五題，每題二十分。

1. 簡答題（請說明原因）

   (a) 某生根據牛頓迭代法的迭代求根公式寫了一個程式，請問他該如何檢驗他所寫的程式是否正確無誤？

   (b) 以下為一階 forward difference formula 數值微分公式的誤差圖形：

   請問為何 h 越小，數值微分的誤差會變大？是哪一種誤差變大了？

   (c) 為何使用 n 個高斯積分點的數值積分法對 $2n-1$ 次的多項式函式作數值積分都不會產生任何 truncation 誤差。

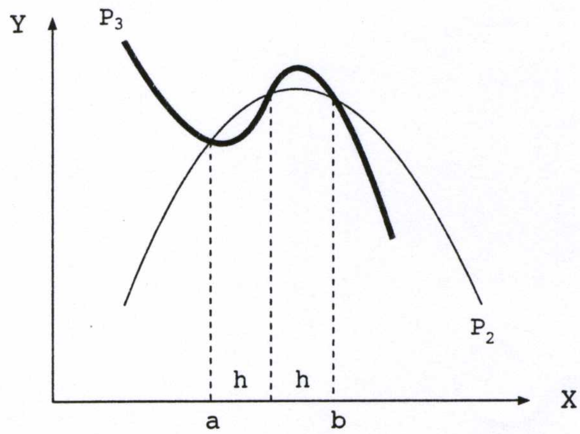
   (d) 請說明為何要使用 cubic spline 來產生平滑曲線都須要額外附加兩個條件。

2. 有一聯立方程組為

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ & \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{cases}$$

   請推導牛頓迭代法的求根迭代公式。

3. Simpson's $\frac{1}{3}$ 積分公式是利用穿過三個在 X 方向的等距點 $(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 所構成的二次差分多項式函數 $P_2(x)$ 來對要積分的函數 $f(x)$ 由作近似積分。若被積分函數 $f(x)$ 為任意穿過此三點的二次多項式函式，則使用 Simpson 積分公式來估算 $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ 的積分時，其計算過程完全不會產生任何 truncation 誤差。但讓人吃驚的是應用同樣的 Simpson 積分公式於任意的三次多項式函式積分上，也是完全不會產生任何的 truncation 誤差，如下圖：



也就是 $\int_a^b P_3(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx$，這裡的 $P_3(x)$ 為任意的三次多項式，$P_2(x)$ 則為 Simpson 的二次差分多項式。請證明以上的等式成立。

4. 欲使用指數函數 $g(x) = a\,e^{bx}$，(e 為 $\exp(x)$ 函數) 為 n 個資料點 (x_i, y_i) 的最小平方法 (least squares method) 的代表函數，請推導出 a 與 b 分別為

$$\ln(a) = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

以上公式中的 $\sum$ 皆為 $\sum_{i=1}^{n}$ 的簡寫。

5. 平滑流 (Laminer flow) 的邊界層方程式 (boundary layer equation) 經過簡化後可表示為以下型式：

$$2\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

所須要的邊界條件 (boundary conditions) 分別為

$$f(\eta) = f'(\eta) = 0 \qquad 當\ \eta = 0$$
$$f'(\eta) = 1 \qquad 當\ \eta \to \infty$$

今若要將之當成起始值問題 (initial value problem) 並使用射擊法 (shooting method) 來求數值近似解，請問該如何求解，請詳細說明你的求解步驟。