數 值 組 博 士 班 入 學 考

題目共五題，每題二十分。

1. 簡答題（各五分，須說明原因）

(a) 假設 f(x) 為二次可微函數，r 為其根(非重根)，$e_n = |r - r_n|$，以下為牛頓迭代法的求根公式與收斂階數推導後的式子：

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|$$

某生根據牛頓迭代法的公式寫了一個程式，假設程式正確，卻發現他所計算出來的收斂階數不為 2 而是一個幾乎為零的數，請問可能的原因為何？

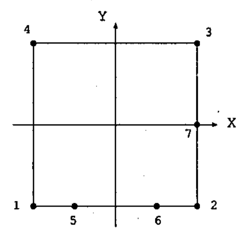
(b) 在推導數值公式時，若 a 與 b 兩數相減後趨近於零，則在公式中常改用 $\frac{a^2-b^2}{a+b}$ 取代，請問原因為何？

(c) 使用 Euler 法計算起始值微分方程式 $y' = f(x,y)$，如何在數值計算上驗證 Euler 的 local trucation error 為 $O(h^2)$。

(d) 使用有限差分法 (finite difference method) 求解 $a(x)y'' + b(x)y' + c(c)y = f(x)$ 邊界值問題。如果所有的係數函數都為連續，一次與二次微分各自使用一次與二次 central difference 公式。若代入差分式後得到線性方程組為 MY=F，請問 M 矩陣的非對稱性通常被哪項所控制？

2. (a) (10 分) 若有 n 個數值點 (x_i, y_i)，i 由 0 到 n-1，請推導出 Lagrange 插分多項式 (interpolating polynomial) 公式 (勿直接寫公式)

(b) (10 分) 有二維方形曲域 [-1,1]x[-1,1] 如右圖，已知七個黑點位置的數值分別為 u_1，u_2，...，u_7，第 5 點與第 6 點的 x 座標分別為 -0.5 與 0.5。若在此曲域的函數可表示為 $u(x,y) = \sum_{i=1}^{7} u_i L_i(x,y)$，請利用一維的 Lagrange 插分多項式組成各項 $L_i(x,y)$？



3. 使用 $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 來估算 $f'(a)$ 微分值，當計算機計算 $f'(a)$ 之值時，若其計算誤差可表示成 truncation error 與 round-off error 之和，請畫出 h 與計算誤差的曲線，推導出最佳的 h 值使得微分的誤差為最小。假設計算機 round-off error 的絕對值最大不會超過 ε 且 $|f'''(x)|$ 有上界 M。

4. 使用高斯積分公式對以下的積分式作積分

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x\,y\,dy\,dx$$

請說明在 x 或 y 方向使用幾個積分點的原因。以下為積分公式所使用的 Legendre 多項式，根(zeros) 與加權數(weights)：

Legendre Polynomial	zeros	weights
x	0	2
$\frac{3}{2}(x^2-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$\frac{5}{2}x(x^2-\frac{3}{5})$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

5. 使用二階的 Runge-Kutta method 來解 $y'=f(x,y)$ 起始值問題 (initial value problem)，若二階 Runge-Kutta method 的一般式可寫成

$$y_{n+1}=y_n+h\left[\,a f(x_n, y_n)+b f(x_n+c h, y_n+d h y_n')\,\right]$$

請推導出 a，b，c，d 之間的關係。