

中央大學數學系九十四年博士班入學考題 數值分析

1. A function f has the values given below.

(25分)

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	10	8	7	6	5

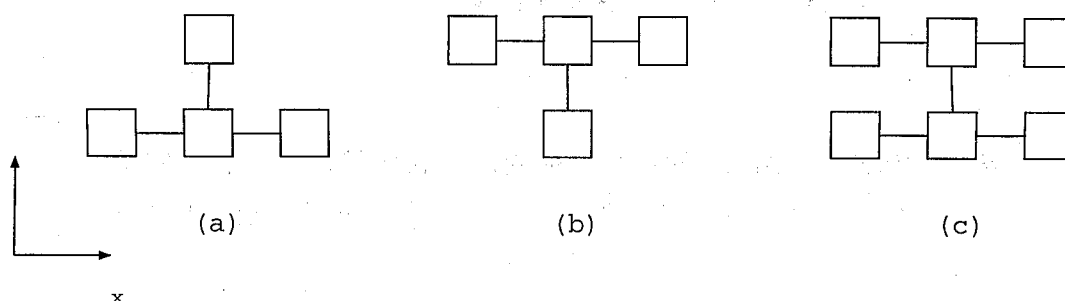
- Use Simpson's rule and function values at $x = 1, 1.5$, and 2 to approximate $\int_1^2 f(x) dx$.
- Repeat the proceeding part using Trapezoid rule.
- Decide which of the two approximations is more accurate. Explain why the answer could be expected.
- Use Simpson's rule and function values at $x = 1, 1.25, 1.5, 1.75$ and 2 to approximate $\int_1^2 f(x) dx$.
- Use the results from parts (1a) and (1d) along with the error terms to establish an improved approximation.

2.

(30分)

若有一熱傳方程式, $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, 這裡的 $T(t, x)$ 為溫度, t 為時間, x 為座標點在 $[0, 1]$ 之間, 假設起始條件與邊界條件分別為 $T(0, x) = u(x)$, 與 $T(t, 0) = c, T(t, 1) = d$. 今若將 $[0, 1]$ 區間切割為 $n+1$ 個等份, 且使用差分法求其計算其數值解,

- 某生分別要使用三種不同的差分公式求解, 若此三種差分公式的差分點間關係可以用下圖表示,



圖內的每一個框框代表一個差分溫度點, 請問此三種方法分別為顯式法 (explicit method) 或者為隱式法 (implicit method), 原因為何?

- 在代入邊界條件與起始條件後, 請問隱式差分法所形成的矩陣中非零元素與零元素之個數比為何?
- 若要使用高斯消去法來計算由隱式差分法所形成矩陣的解, 矩陣所須要的計算量(次數)若可以用 big-O 來表示, 即 $O(n^p)$, 則 p 應為多少

數值分析

3. (25分)
- (a) 令 v 是一個 n 維實數向量，其 $\|v\| = 1$ 。令 $P = I - vv^T$ ，其中 I 表示 n 維單位方陣。請證明 P 是一個投影算子，亦即 $P^2 = P$ 。
- (b) 請證明 P 其實是一個正交投影算子。亦即 $v - Pv$ 與 Pv 垂直。
- (c) 任給一個非零的 n 維實數向量 x ，令 $w = \|x\|e_1 - x$ 且 $v = w/\|w\|$ ，其中 e_1 表示第一個元素是 1 其他元素都是 0 的單位向量。定義 $F = I - 2vv^T$ 。請證明 $Fx = \|x\|e_1$ 。 F 稱為 x 的 *Householder reflector*。
- (d) 令 F 是一個 Householder reflector，請證明 F 是一個正交矩陣。亦即 $FF^T = I$ 。
- (e) 利用 Householder reflector 設計一個演算法，使得給定一個 n 維方陣 A ，能夠算出一個正交矩陣 Q 和一個上三角矩陣 R ，符合 $A = QR$ 。 Q 和 R 稱為 A 的 *QR Factorization* (QR 分解)。

4. (20分)
- Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, be a bounded open domain with smooth boundary $\partial\Omega$. Let $\alpha > 0$. Define
- $$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv + \alpha \int_{\partial\Omega} uv, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$
- Let $f \in L^2(\Omega)$.

(a). Show that there exists a unique $u \in H^1(\Omega)$ such that

$$a(u, v) = \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

(b). If u is smooth enough, interpret u as the solution of a boundary value problem.