

數值組博士班資格考

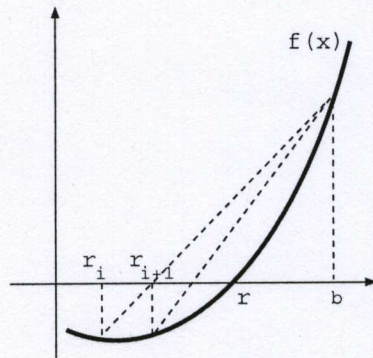
題目共六題任選五題，每題二十分。

1. (收斂階數) 若  $f(x)$  為平滑向上彎曲函數(concave upward function)， $f(x) = 0$  的根  $r$  在  $[r_i, b]$  之間  $\forall i \geq 0$ ，regula falsi (false position) 求根法的迭代步驟可寫成以下公式：

$$r_{i+1} = b - f(b) \frac{b - r_i}{f(b) - f(r_i)} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

(a) 若  $e_n$  為誤差  $r_n - r$ ，證明  $e_{n+1} = \frac{e_n f(b) + (r - b) f(r_n)}{f(b) - f(r_n)}$

(b) 推導 regula falsi 求根法的收斂階數為 1，既  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = C$ ， $C$  為常數。(提示： $f(r_n) \approx f(r) + f'(r)e_n + O(e_n^2)$ )



2. (數值微分) 假設  $f(x) \in C^4[a-h, a+h]$ ， $f(x)$  在  $a$  點的兩次微分  $f''(a)$  可以用以下三個點的線性組合合成：

$$f''(a) = \alpha f(a-h) + \beta f(a) + \gamma f(a+h)$$

請推導  $\alpha, \beta, \gamma$  的值使得此公式的 truncation error 為  $\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$ ， $\xi$  在  $(a-h, a+h)$  之間。

3. (數值積分) 梯形公式為  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$ ，請推導複合梯形法積分公式，若  $h = \frac{b-a}{n}$ ， $n$  為等份數，請驗證此公式的 truncation error  $\leq \frac{b-a}{12} h^2 |f''(c)|$  與 round-off error  $\leq (b-a)\epsilon$ ，這裡的  $c$  在  $a$  與  $b$  之間， $\epsilon$  為浮點數在計算機內的最大 round-off error 數值。



4. (聯立方程組) 有一聯立方程式組為

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

請使用牛頓迭代法推導求根的迭代公式。

5. (Runge-Kutta method) 某一階常微方程式為  $y'(x) = f(x, y(x))$ ，起始條件為  $y(x_0) = y_0$ 。今要使用 Runge-Kutta 方法來計算此常微方程式的數值解，假設 Runge-Kutta method of order 2 的一般式可表示成以下形式：

$$y_{n+1} = y_n + h [ a_1 f(x_n, y_n) + a_2 f(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y_n') ]$$

請推導  $a_1, a_2, b_1, b_2$  的關係式為：

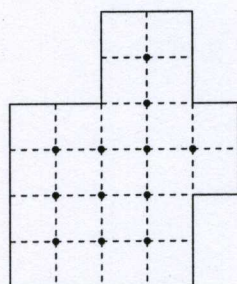
$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 b_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 b_2 = \frac{1}{2}$$

(提示：雙變數 Taylor expansion)

6. (矩陣組合) 某微分方程式  $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2u = f(x, y)$  定義於以下區域， $u(x, y)$  函數在邊界的數值為零。今要使用以下兩種數值方法求其近似解，假設未知點的排列順序為由下而上，由左而右。請用以下方式描繪出最後組合出來的矩陣形式：若矩陣元素為零，則畫 ○，若不為零，則畫 ×。



(a) 使用有限差分法求解，兩次微分與一次微分都使用 central difference。

(b) 使用有限元素法求解，元素為四邊形的 linear element。