(共二頁)

數 值 組 博 士 班 資 格 考

題目共六題任選五題，每題二十分。

1. 使用有限元素法計算某 two-point BVP (boundary-value problem)： -u"(x) + u(x) = 1 for $0 < x < 1$ with u(0)=u(1)=0 的數值解，若將區間分割為四個元素，請回答以下問題：

   (a) 若由左而右，元素的階數 (order) 為 1，3，1，2，請畫出所有有限元素法所使用的基底函數 (basis functions)

   (b) 若四個元素的階數皆為 p，請推導出 stiffness matrix 大小與非零元素所佔比率

2. 導出以下 two-point BVP 的 variational formulation：

   (a) $-u''(x) + u(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1$

   $u'(0) = 0$ ， $u(1) = b$

   (b) $-u''(x) + u(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1$

   $a_0\, u(0) + b_0\, u'(0) = c_0$ ， $a_1\, u(1) + b_1\, u'(1) = c_1$

3. 證明以下微分方程式

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = f \qquad 0 < x < 1 \quad \text{with} \quad u(0) = u''(0) = 0 \text{ ，} \quad u'(1) = u'''(1) = 0$$

   的 variational formulation： find $u \in V$ such that a(u,v) = L(v) $\forall\, v \in V$，滿足以下四個條件：

   (a) $a(.,.)$ is symmetric

   (b) $a(.,.)$ is continuous： $|\,a(v,w)\,| \le c_0 \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall\, v, w \in V$

   (c) $a(.,.)$ is V-elliptic： $|\,a(v,v)\,| \ge c_1 \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V$

   (d) L is continuous： $|L(v)\,| \le c_2 \|\,v\,\|_V \quad \forall\, v \in V$

   以上 c_0、c_1、c_2 皆為常數。

4. 使用有限元素法計算以下 two-point BVP 的近似解，假設使用的元素階數 (order) 分別為 1 到 4，若使用 Gauss 積分法來積分，則分別至少要使用多少個積分點才能無任何 truncation error。

$$-a(x)\frac{d^2u}{dx^2}+b(x)u\frac{du}{dx}+c(x)u=1 \qquad x\in(0,1)$$

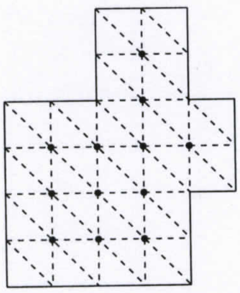
$u(0)=u(1)=0$，以上的係數 $a(x)=b(x)=x$， $c(x)=x^2+1$。

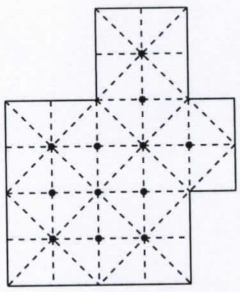
5. 某微分方程式：

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2u=f(x,y)$$

定義於以下區域， u(x,y) 在邊界的數值為零。今要使用有限元素法與線性三角形元素 (linear triangular element) 求近似解，假設區域被分割為以下兩種方式，未知點的排列順序為由下而上，由左而右。請針對以下兩分割區域分別描繪出最後組合出來的矩陣形式：

若矩陣元素為零，則畫 ○，若不為零，則畫 ×。





6. 證明在二維空間上，由 master element (s,t) 座標系統到實際使用的座標系統 (x,y) 有以下的轉換公式：

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial s}$$

以上的

$$|J|=\det J=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}$$