

數 值 組 博 士 班 資 格 考

以下六題共有 12 個小題，任選 10 題，每小題十分。

1. 求根法：

(a) [10分] 某數值演算法當執行步驟 n 很大時，其計算誤差可表示為 $\frac{1}{2^{2n}}$ ，則此數值方法的收斂階數為何？

(b) [10分] 某一函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 有 k 個重根($k > 1$)，即 $f(x) = (x - a)^k g(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ，驗證使用牛頓迭代法估算 a 根時，其收斂階數降為 1。

2. 微分方程數值求解：

若 $y' = f(x, y)$ ， $x_{i+1} = x_i + h$ 與 $y_i = y(x_i)$ ，推導以下 multistep 公式的 A, B 與驗證 local truncation error 階數皆為 $O(h^3)$ ：

(a) [10分] 二階 Adams-Bashforth method 公式： $y_{i+1} \approx y_i + h (A f(x_i, y_i) + B f(x_{i-1}, y_{i-1}))$

(b) [10分] 二階 Adams-Moulton method 公式： $y_{i+1} \approx y_i + h (A f(x_i, y_i) + B f(x_{i+1}, y_{i+1}))$

3. numerical differentiation/integration：

(a) [10分] 推導一次導數的三點 forward formula 與截去誤差階數(order of truncation error)

$$f'(x) \approx a f(x) + b f(x + h) + c f(x + 2h)$$

(b) [10分] 兩點高斯積分公式 $\int_{-1}^1 f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$ ，求 a_0, a_1, x_0, x_1 ？

4. Interpolation：

(a) [10分] 證明 Lagrange Polynomial Approximation Theorem：

假設 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 且 $f^{(n+1)}(x)$ is continuous on $[a, b]$ ，則

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi \in (a, b), \text{ such that}$$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$$\text{where } P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x)$$

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad (\text{Lagrange interpolating polynomial})$$

(b) [10分] 證明 $\sum_{j=0}^n L_j(x) = 1$

5. solving systems of nonlinear equations :

$$\text{若有聯立方程組 } \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

(a) [10分] 請推導 steepest descent method 的迭代公式

(b) [10分] 請推導 newton method 的迭代公式

6. numerical solutions of pde :

有一 pde 為 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ ，假設有適當起始條件與邊界條件：

(a) [10分] 使用差分法估算數值解，若 x 軸使用三點 central difference，在 t 軸使用兩點 forward difference。定義 $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ，則此數值差分法為 stable 的條件是 $r < 0.5$

(b) [10分] 推導 Crank-Nicolson 差分法，並證明其為 unconditionally stable