

## 大學甄選入學考試

### 一. 填充題 (每題 6 分)

(1) 某個數學定理為：

if  $f(x)$  is continuous(連續) on the closed interval  $[a, b]$  and  $k$  is any number between  $f(a)$  and  $f(b)$ , then there is at least one number  $c$  in  $[a, b]$  such that  $f(c) = k$

請利用以上的定理推導連續多項式函數  $f(x) = x^5 - 4x^3 - 2x + 1$  在  $[0, 1]$  之間至少有一個根。

(2)  $\overline{AD}$  是  $\triangle ABC$  的中線 ( $D$  在  $\overline{BC}$  上),  $H$  點在  $\overline{AC}$  上且  $BH \perp \overline{AC}$ , 若  $\overline{AB} = 12$ ,  $\overline{BC} = 10$ ,  $\overline{AC} = 14$ , 則  $\overline{DH}$  長為何?

(3) 若  $n$  與  $\sqrt{n^2 - 7n - 1}$  皆為整數, 則  $n$  為何?

(4) 若  $\tan x + \cot x = a$ , 則  $\tan^3 x + \cot^3 x$  可用  $a$  表示為?

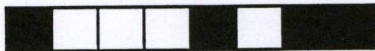
(5) 求  $(\cos x)^{2000} - (\sin x)^{2000} = 1$  所有實數根的一般解?

(6) 推導  $2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \dots + (2n) \cdot 3^n$  之和?

(7) 若數列為  $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$  且  $a_1 = 1$ , 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  為何?

(8) 計算機輸出的文字許多都是用點矩陣來表示, 所謂的點矩陣文字有點像將文字寫在方格紙上, 若文字的筆劃出現在小格子內, 則須印出一小點, 若沒有出現在格子內, 則不須要印出任何東西。現在使用八個 0 或 1 來表示八個格點的填滿狀態, 若是格子有塗滿則以 1 表示, 沒有塗滿則以 0 表示。舉例來說, 數字 139 若以二進位數字表示可寫為:  $10001011_2$ , 即

$$139 = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$10001011_2$  由左到右以圖形表示則為 , 左邊圖形同時也是數字 139 所對應的點矩陣圖形。今有一中文字是以八個數字來表示, 由上而下數字分別為 127, 8, 8, 62, 10, 18, 36, 255, 請畫出此中文字的點矩陣圖形。

## 二. 演算題 (每題 13 分)

(1) 若有一數字圖形以下三角形方式排列，例如：

列數  $n = 4$

1  
2 5  
3 6 8  
4 7 9 10

列數  $n = 5$

1  
2 6  
3 7 10  
4 8 11 13  
5 9 12 14 15

若想針對列數為  $n$  的數字圖形推導出一函數  $F(r, c)$ ， $r$  為橫列， $c$  為直行，使得當我們指定  $r$  與  $c$  的位置時，圖形所在的數值可以直接由函數  $F(r, c)$  求得，請推導  $F(r, c)$ ？ 假設  $r$  與  $c$  皆由 1 起算，若以列數  $n = 5$  為例， $F(3, 2)$  為 7， $F(5, 3)$  為 12。

(2) 證明  $2^n \geq n^2$ ， $n \geq 4$

(3) 求  $(\tan x)^{\sin x} = (\cot x)^{\cos x}$  的一般解

(4) 若  $a, b, c$  都為整數，且  $a^6 + 2b^6 = 4c^6$ ，證明  $a = b = c = 0$