

## 大學甄選入學考試

### 一. 填充題 (每題 6 分)

(1) 若  $x^3 + (t^2 - t)x = 0$  的三個根皆為實數且相異，則  $t$  的範圍為何？

(2) 求  $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}}}}}}$  之值？

(3) 若  $a_1 = 3, a_2 = 33, a_3 = 333, a_4 = 3333, \dots$ ，請導出  $\sum_{i=1}^n a_i$  的公式？

(4) 如果  $x, y, u, v$  滿足以下方程組：

$$\begin{aligned} u + v &= 2 \\ ux + vy &= 1 \\ ux^2 + vy^2 &= -1 \\ ux^3 + vy^3 &= -5 \end{aligned}$$

請問  $x$  與  $y$  為何？

(5) 如果  $a > b > 0$  且  $\gcd(a, b) = 1$ ，則  $\gcd(a+b, a-b) = ?$

(6) 若要寫出由 109 到 5104 的所有整數，請問總共會寫幾個 0？

(7) 二進位的數字只用到數字 0 或 1，一個二進位的數字可表示成  $\sum_{n=a}^b c_{n-a} 2^n$ ，這裡的  $b \geq a$ ，所有的係數  $c_{n-a}$  不是 0 就是 1。舉例來說：十進位的 10.5 等於  $8 + 2 + 0.5 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$ ，可簡寫成  $1010.1_2$ ，下標 2 代表數字為二進位數字。同樣的，十進位的 0.625 等於  $0.5 + 0.125 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$ ，可以寫成  $0.101_2$ 。現有一個二進位循環小數為  $0.000110_2$ ，也就是  $0.0001100011000110 \dots_2$ ，請問此數所對應的十進位數字為何？

(8) 讓  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  代表一堆集合，如果  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  滿足

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

則  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  就有 ★ 性質。

請根據以上的描述，回答以下問題決定是否  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  有 ★ 這個性質。

(a)  $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} < x \leq 1 + (-1)^n \right\}$  Yes: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

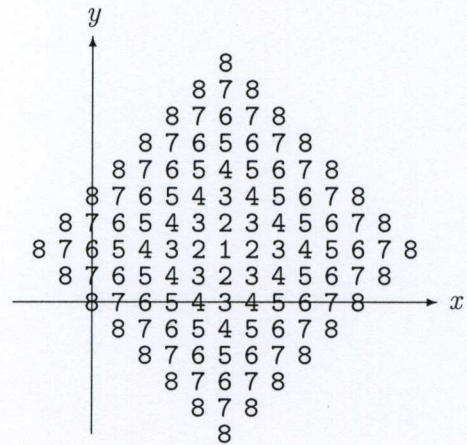
(b)  $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1+n}{n} < x < \frac{1+n}{n} \right\}$  Yes: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

(c)  $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1+n}{n} \leq x \leq \frac{1+n}{n} \right\}$  Yes: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_



二. 演算題 (每題 13 分)

(1) 右圖所有的數字都在格點上，上下左右相鄰數字間的距離皆為 1，數字以菱形圖樣向外擴展遞增，每個菱形邊上的數字都相同。



(a) (5 分) 請問在座標點  $(-50, 50)$  上的數字為何？

(b) (8 分) 邊上有上題數字的菱形，其內部(含邊)的數字總和為多少？

(2) 若符號  $[a]$  表示不大於  $a$  的最大整數，例如： $[3.9]$  為 3， $[3]$  為 3。請找出以下式子的整數解。

$$\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10!} \right\rfloor = 1001$$

以下為一些可能會用到的數據：

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!
1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\frac{1}{5!}$					
1	0.5	0.16667	0.041667	0.008333					
$\frac{1}{6!}$	$\frac{1}{7!}$	$\frac{1}{8!}$	$\frac{1}{9!}$	$\frac{1}{10!}$					
$1.389 \times 10^{-3}$	$1.984 \times 10^{-4}$	$2.480 \times 10^{-5}$	$2.756 \times 10^{-6}$	$2.756 \times 10^{-7}$					

(3) 若  $n$  為自然數，請證明  $15^n + 6$  可除得盡數字 7。

(4) 若方形的邊長為 1，請算出以下由四個扇形曲線所圍出的斜線面積。

