

大學甄選入學考試

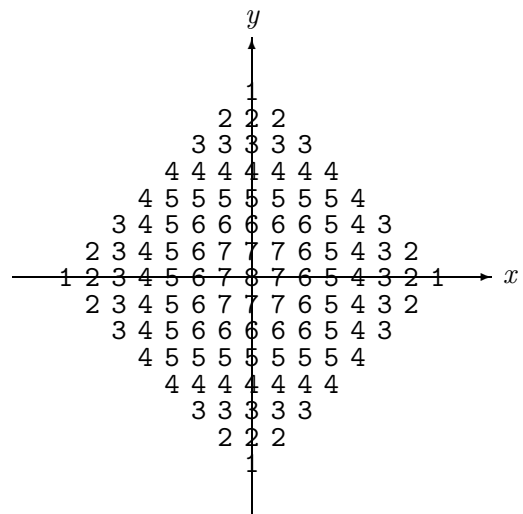
一. 填充題 (每題 6 分)

- (1) 已知 $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6$ ， a 、 b 、 c 皆為正整數。若此三數為等比遞增數列，且 $b - a$ 為一整數的平方，則 $a + b + c$ 為何？
- (2) 甲袋有 5 顆白球，2 顆紅球，3 顆黑球。乙袋有 7 顆白球， N 顆紅球，5 顆黑球。從由兩袋各取一顆球，兩球不同的機率為 0.67，則 N 應為多少？
- (3) 若函數 $f(x)$ 定義於 $[0, 1]$ 閉區間，且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$ ，如果對任兩個 x, y 在 $[0, 1]$ 之間都有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a^2)f(x) + a^2f(y)$ ，且 $0 < a < 1$ ，則 a 值為何？
- (4) Fibonacci 數列定義為： $F_0 = F_1 = 1$ ， $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ，計算以下無窮級數之值：

$$F_0 + \frac{3F_1}{5} + \frac{3^2F_2}{5^2} + \cdots + \frac{3^n F_n}{5^n} + \cdots$$

- (5) 若 $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ ，則 x 為何？
- (6) 若 u, v, w 為多項式 $x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ 的根，求 $u^2 + v^2 + w^2$ 之值？
- (7) 若 N 為正數，且 $N^2 = 25^{64} \cdot 64^{25}$ ，則 N 的各個位數的數字和為何？

- (8) 右圖菱形圖的所有數字都在格點上，上下左右相鄰數字間的距離皆為 1，若原點的數值為 n ，數字以方形方式向外擴展遞減直到菱形四個角落的數值為 1 為止，菱形區域以外無數字。請寫出此圖形的定義域與其對應函數 $f(x, y)$ 使其在輸入各點的座標值 (x, y) 後可得到對應的數值，右圖為 $n = 8$ 的圖形。



二. 演算題 (每題 13 分)

- (1) A 、 B 、 C 為某三角形的三個內角度，數值呈現一個等差數列，若 a 、 b 、 c 分別代表 A 、 B 、 C 三內角的對應邊，則 $\frac{a}{c} \sin 2C + \frac{c}{a} \sin 2A$ 為何？
- (2) 計算多項式 $p(x) = x^{2007} - x^{2005} - x^{2003} - \dots - x^3 - 2x$ 所有實數根的平方和？
- (3) 若 n 為自然數， $2n$ 有 28 個因數， $3n$ 有 30 個因數，則 $6n$ 有幾個因數？
- (4) 求滿足 $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ 所有實數根的和？