

## 大學甄選入學考試

### 一. 填充題 (每題 6 分)

(1) 如果  $a, b$  都為實數, 且  $a + b = 1$  與  $(1 - 2ab)(a^3 + b^3) = 12$ , 則  $a^2 + b^2$  為何?

(2)  $2^{2015} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi}{2^{2015}}\right) = ?$

(3) 計算以下方程式所包圍的面積?

$$|x - 0.5| + |x + 0.5| + \frac{2|y|}{\sqrt{3}} = 2$$

(4) 四個不同多面柱體骰子分別可顯示 1 到 3 點, 1 到 4 點, 1 到 5 點, 與 1 到 6 點等不同點數, 則四個骰子的點數呈現連續數字的機率為何?

(5)  $\log 3 \approx 0.4771$ ,  $\log 7 \approx 0.8451$ , 則方程式  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} + 7^{x+3}$  的根  $x$  為何? (四捨五入至小數點後第三位)

(6) 某  $n \times n$  矩陣數值如下分佈, 以下為  $n$  等於 5 與 6 的矩陣資料:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$n = 5$

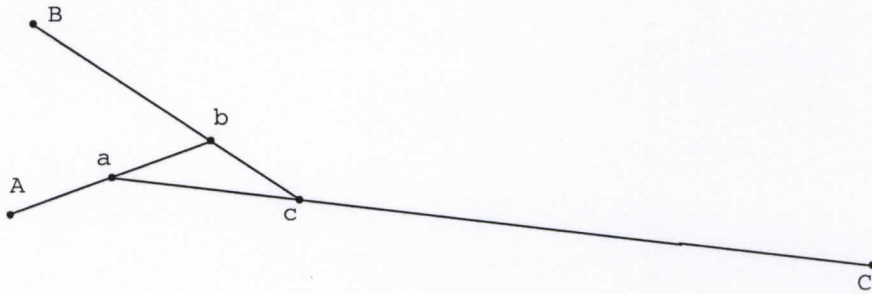
$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 12 & 18 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 13 & 19 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

$n = 6$

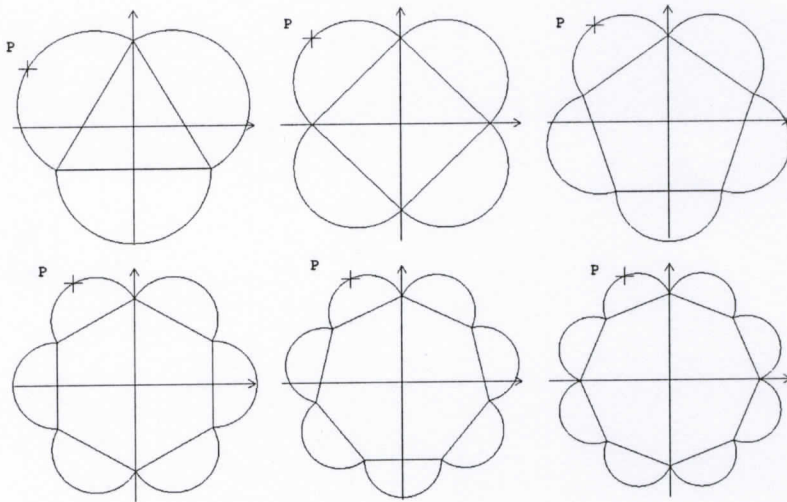
請定義一函數  $f(n, i, j)$  可求得以上  $n \times n$  矩陣在下標  $(i, j)$  的矩陣數值, 矩陣左上角元素下標  $(i, j)$  為  $(1, 1)$ 。

$$f(n, i, j) = \begin{cases} \dots & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

- (7) 下圖  $\triangle abc$  面積為 1， $|\overline{Aa}| = |\overline{ab}|$ ， $|\overline{Bb}| = 2|\overline{bc}|$ ， $|\overline{Cc}| = 3|\overline{ca}|$ ，則  $\triangle ABC$  面積為何？



- (8) 以下每個圖形皆在正  $n$  邊形的各邊畫半圓，正  $n$  邊形的頂點都在半徑為 1 的圓周上，且最高的頂點在  $Y$  軸上，座標為  $(0,1)$ 。若讓  $\theta$  為  $\frac{2\pi}{n}$ ，則在  $Y$  軸左側圓弧中間點  $P$  的座標（即十字交點）為何？



## 二. 演算題 (每題 13 分)

(1) 找出滿足的多項式函數  $P(x)$  使得  $xP(x-1) = (x-10)P(x) \quad \forall x$

(2) 證明若  $P(x)$  為實係數多項式，且滿足  $P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1)$ ，則  $P(x) = -P(x)$

(3) 若  $a_1 = 1$ ，且  $a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ ，證明  $a_n$  皆為正整數。

(4)  $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\overline{BC}$  的平分線， $|\overline{AB}| + |\overline{AD}| = |\overline{DE}|$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，且  $|\overline{AE}| = 6$ ，則  $\triangle ABC$  面積為何？

