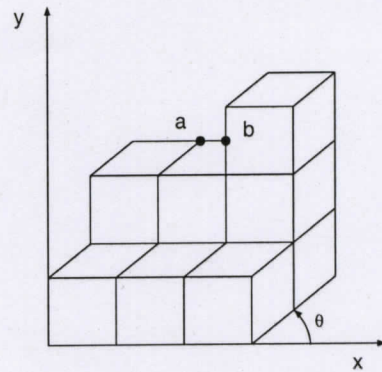


大學甄選入學考試

一. 填充題 (每題 6 分)

- (1) 在二維平面顯示三維幾何圖形，為了讓「人眼」感覺三維立方體邊長是等長，在二維平面上，斜邊長會縮為水平線或垂直線長度的 r 倍， r 小於 1，假設斜邊的角度為 θ ，如果 \overline{ab} 長度為方格邊長的 $\frac{1}{s}$ ，則 $\tan \theta$ 為多少？



- (2) 已知 $f(x)$ 滿足 $f(x) + f(x+1) = 2^x$ ，同時 $f(0) = 10$ ，則 $f(10)$ 為多少？

- (3) 已知 $\sum_{i=1}^{10} a_i = 12$ 與 $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 16$ ，如果所有的 a_i 皆為實數，那麼 a_{10} 的最大值是多少？

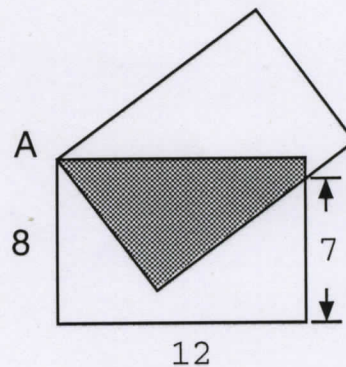
- (4) 找出一個整數係數四次多項式函式使得其有一根為 $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ？

- (5) 求 $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ 的最小實數根？

- (6) 有五面骰子一個，六面骰子與八面骰子各兩個，五面、六面、八面骰子各面數字分別為 1 到 5，1 到 6 與 1 到 8。如果隨意挑一個骰子投擲得到 6，請問這個骰子是六面骰子的機率是多少？

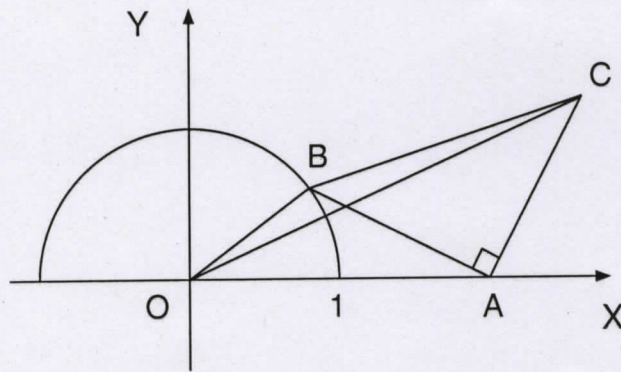
- (7) 求一個四位數使得其乘上 9 後的乘積是此四位數的位數逆轉數，也就是若四位數為 $abcd$ ，則 $abcd \times 9 = dcba$ 。

- (8) 如右圖，兩個 8×12 的相同矩形連接於 A 點，則兩矩形重疊部份的面積(即陰影面積)是多少？



二. 演算題 (每題 13 分)

- (1) 五個連續正整數的乘積除以這五個數的和是 100 的倍數，則這五個數和的最小值是多少？
- (2) 如果 $a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ， $b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ，同時已知 $a_0 = -2$ 與 $b_0 = 1$ ，則 a_{100} 是多少？
- (3) 如圖，B 是 $x^2 + y^2 = 1$ 半圓 ($y \geq 0$) 上的一點，A 座標為 (2,0)， $\triangle ABC$ 是以 BC 為斜邊的等腰直角三角形，則 B 在圓上的哪裡時， \overline{OC} 為最長，長度為何？



- (4) 令 $P(x)$ 為一個與變數 x 有關的敘述，例如： $P(x)$ 為「 x 是一個質數」，而一個與變數 x 有關的敘述 $P(x)$ 的真集被定義為「使得 $P(x)$ 為真的敘述的所有 x 所形成的集合。」。現給定一個 x 、 $P(x)$ 與一個集合 A ，定義以下二個新的敘述：
- $(\forall x \in A) P(x)$ ，此敘述為真的標準是 $P(x)$ 的真集合為 A
 - $(\exists x \in A) P(x)$ ，此敘述為真的標準是 $P(x)$ 的真集不是空集合，也就是 A 不是空集合

試從以上的說明，判斷以下的敘述哪個是真，若為真請加以證明，若非真則舉出一個反例：

- a. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^3 + 17x^2 + 6x + 100 > 0)$ ，其中 \mathbb{R} 代表所有實數
- b. $(\exists x \in \mathbb{N})(x^2 - x + 41 \text{ 是質數})$ ，其中 \mathbb{N} 代表所有自然數
- c. $(\exists x \in \mathbb{R})(3^x = x^2)$