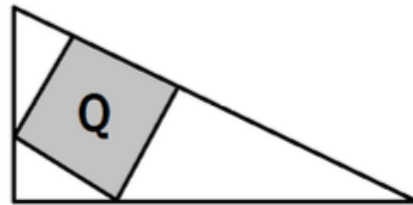
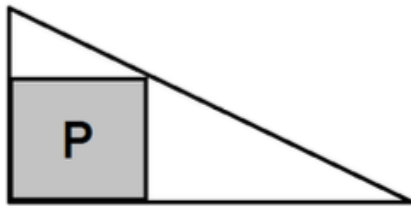


## 大學甄選入學考試

本試題卷共 8 題計算證明題。需有演算過程，否則不予計分。

1. (10 分)試求圓 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ 跟圓 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 相交部分的面積。
2. (10 分)自  $1, 2, 3, \dots, 100$  中任取相異三數，則此三數成為等差之機率為多少？
3. (10 分)抽屜中置有若干紅色及若干黑色襪子，若隨機抽取兩隻襪子，其均為紅色的機率為  $1/2$ ，試問此抽屜中至少有幾隻襪子？
4. (10 分)隨機地擺放在平面上的 2017 個圓可將平面分割成  $n$  個區域(包括唯一無界的區域)，試問  $n$  的最大值為多少？
5. (10 分)假設  $A, B, C$  為某三角形的三個內角角度，若  $a, b, c$  分別代表  $A, B, C$  三內角的對應邊的邊長，已知 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ ，且  $2\cos A \sin B = \sin C$ ，試問此三角形為何種三角形？
6. (15 分)試求方程式  $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$  的所有實數解。
7. (15 分)在一個給定的直角三角形中內接正方形 P 跟正方形 Q，如圖下所示。試問 P 跟 Q 何者面積為大？



(背面尚有考題)

8. (20 分) 已知數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_1 = \frac{1}{2}$  且  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$  ( $n \geq 1$ )。

(1) 證明:  $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$  ( $n \geq 1$ )。

(2) 假設  $S_n = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ 。證明:  $\frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$  ( $n \geq 1$ )。