

大學甄試入學考試

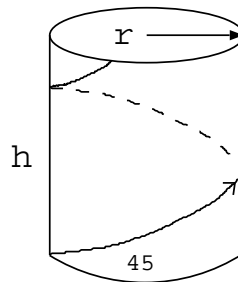
一. 填充題：共八題, 每題五分

(1) 若一數學式為

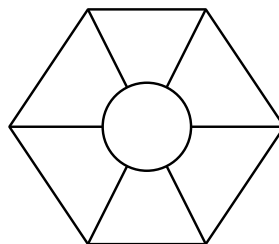
$$\begin{array}{r}
 F \quad I \quad V \quad E \\
 \quad \quad T \quad W \quad O \\
 + \quad \quad O \quad N \quad E \\
 \hline
 E \quad I \quad G \quad H \quad T
 \end{array}$$

以上各英文字母代表一數字且不重複，若 V 與 W 各代表 7 與 4，請問 TEN 為何數字？

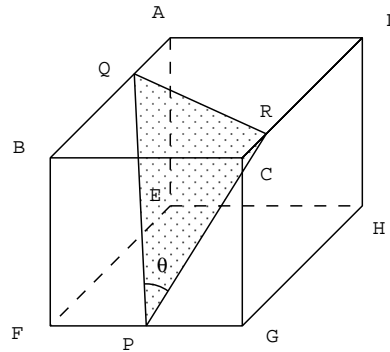
(2) 一圓柱體高度為 h ，半徑為 r ，若有一彩帶由圓柱的邊緣底部延著 45 度方向往上繞行，請問繞到頂端時，彩帶總共繞圓柱體幾圈？



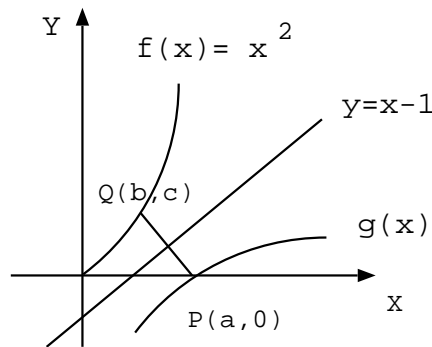
(3) 10 種不同顏色塗入以下有七個區域的正六邊形，共有幾種塗法？



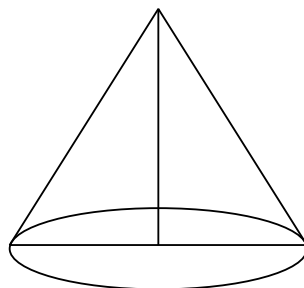
- (4) 有一單位正方體 $ABCDEFGH$ ，若 $\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ， $\overline{FP} = \overline{PG}$ ， $\overline{RC} = \frac{1}{5}\overline{DC}$ ， $\theta = \angle QPR$ 則 $\cos \theta$ 的值與 $\triangle QPR$ 的面積分別為何？



- (5) 若 $g(x)$ 為 $f(x) = x^2$ 對稱於直線 $L : y = x - 1$ 的對稱曲線，點 $P(a, 0)$ 在 $g(x)$ 曲線上且 P 點與點 $Q(b, c)$ 為對稱於直線 L 的兩對稱點，則 $a + b + c$ 之值為何？



- (6) 一正圓錐體，既包含中心軸的垂直截面為正三角形，則此圓錐的側表面積為其底面積的幾倍大？



(7) 若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ 則 $\sin 2\theta$ 為何？

(8) 若 n 為正整數，且滿足以下條件

a. n 為 $2^3 \times 3 \times 7^2$ 的倍數

b. n 為 $2^2 \times 3^2$ 的倍數

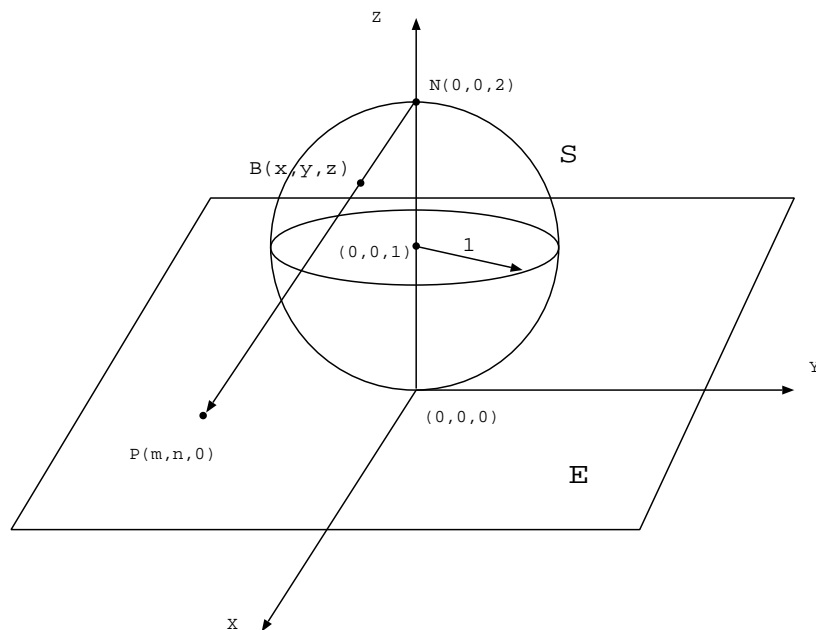
c. $2^6 \times 3^5 \times 7^{11}$ 為其倍數

d. $2^{10} \times 3^7 \times 7^8$ 為其倍數

請問滿足以上條件的 n 有多少個？

二. 演算題：共四題，每題十五分

- (1) 某生使用計算器，先輸入數字 10，然後連續按開根號按鈕，分別得到以下數字 10, 3.1622777, 1.7782794, 1.3335214, 1.1547820, 1.0740780, 1.0366329, 1.0181517, 1.0090350, ...，他發現不管由那個數字開始，經過多次的開根號後，數字的小數部份會漸漸地趨近於前一個數字小數部份的一半，你能否用數學的方法證明他的觀察是正確的。
- (2) 假設 $0 \leq a_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, 6$, 令 m 為 $a_1(1 - a_6)$, $a_2(1 - a_5)$, $a_3(1 - a_4)$, $a_4(1 - a_3)$, $a_5(1 - a_2)$, $a_6(1 - a_1)$ 六數的最小值，請證明 $m \leq \frac{1}{4}$
- (3) S 為以點 $(0, 0, 1)$ 為圓心，半徑為 1 的單位球面，既 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ ， $N(0, 0, 2)$ 為球面 S 的北極點， E 為 $X - Y$ 平面，點 $P(m, n, 0)$ 為位於平面 E 上的一點，點 $B(x, y, z)$ 為直線 NP 與球面 S 的交點，若要用 P 點的 m, n 來表示 $B(x, y, z)$ 點的座標，既 $x = F(m, n)$, $y = G(m, n)$, $z = H(m, n)$ ，請問 F, G, H 三個函數分別為何



(4) 若 $a_n = \underbrace{11 \cdots 1}_n$, 共有 n 個 1, 若 a_n 為一質數, 請證明 n 亦為質數

(提示: $a_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1}$)