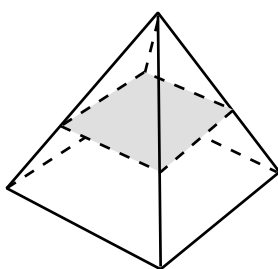


大學申請入學考試

一. 填充題：每題六分

- (1) 截面為正方形的金字塔，若底部正方形的邊長為 a ，金字塔高度為 h ，若某一截面距離底部高度為 y ，則其截面積公式為何



- (2) 若 $f(x) = -2(4^x + 4^{-x}) + 12(2^x + 2^{-x}) + 10$ ，求 $f(x)$ 的最大值

(3) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $(I + \frac{1}{3}A)^8 = I + qA$ ，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

求 q 之值

(4) 若 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ，則滿足 $(AB)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

的最小自然數 n 的值為多少

- (5) 若 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，且 $a \cos 2\theta + 2a \cos \theta$ 的極大值為 3，則 a 為何

- (6) 有 5 人的數學成績為 40, 20, 60, 80, x ，若標準差為 $10\sqrt{5}$ ，則變異係數 $\frac{S_x}{\bar{x}}$ 為何

(7) 若 $a^3 + b^3 = -1$, $ab = 1$, 請計算 $a^{300} + b^{300}$ 之值

(8) 若 $a^x = b^y = (ab)^z$ 且 $xyz \neq 0$, a, b 均為不為 1 的正數, 若 z 用 x, y 的方式表示, 則函數 $z(x, y)$ 應為多少

二. 演算題：每題十分，最後一題十二分

(1) 以下為從前美國某電視臺一個益智節目中的遊戲規則：

在三個寶藏門之後分別有羊或是汽車，但其中只有一扇門內藏有車子，現在先由來賓隨意選定一扇門，接下來主持人將剩下的兩扇門中有羊的一扇門打開，然後問來賓要不要與最後剩下的一扇門更換，如果你是這位來賓，請問你要不要更換你所選定的寶藏門？請寫出你的推論過程，算出更換後獲得車子的機率為何？如果問題換成 n 扇門， $n-1$ 隻羊，一輛車，採用同樣的遊戲規則，則更換門後獲得車子的機率又為多少？

(2) 若 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ，其中 $a_{ij} = 2ij + j^2$ ， A 的所有元素總和為 114，請計算 n 之值

(3) 將被 3 除餘 2，且被 5 除餘 3 的所有自然數由小到大排成一數列 $\{a_i\}$ ，請計算數列的前一百項元素之和，即 $\sum_{i=1}^{100} a_i$ 之值

(4) 若 $n > 1$ ，證明 $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

(提示：平方後， \cdots ，利用 $(k+1)(k-1) < k^2$ 不等式)

(5) 若 $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ， $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ ， $a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ ， \cdots ，且 $a_1 = 1.41421$ ， $a_2 = 1.85776$ ， $a_3 = 1.96157$ ， $a_4 = 1.99037$ ， \cdots 則

(a) 證明是否 $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) 證明 $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 為何