

大學甄選入學考試

一. 填充題：每題六分

(1) 讓 $n = 100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ ，則 n 這個數的末尾會連續出現多少個 0？

(2) 警察逮捕了三位嫌疑犯，

甲說：「大家都說謊。」

乙說：「只有兩人說謊。」

丙說：「是他們兩個說謊。」

請問有那些人說的是真話而該被釋放？

(3) 如果一個正三角形的面積為 $9\sqrt{3}$ ，請問它的外接圓面積為何？

(4) 有個骰子，其六面分別標示數字 1、2、3、4、5、6。假設每面出現的機率都相同，小明擲此骰子 3 次，試求在前 2 次的數字和等於第 3 次的數字的條件下，至少出現一個數字 3 的機率。

(5) $P(x)$ 為一多項式且 $P(x)$ 除以 $x - 20$ 餘 10， $P(x)$ 除以 $x - 10$ 餘 20。請問 $P(x)$ 除以 $(x - 20)(x - 10)$ 餘項為何？

(6) 令 $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ， $f: N \rightarrow N$ 定義為

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & n \text{ 為奇數} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ 為偶數} \end{cases}$$

若 k 為奇數且 $f(f(f(k))) = 53$ ，求 k 之值。

(7) 下列那一個數字可以表示為連續 100 個正整數的和？

- (A) 6,872,503,290 (B) 1,627,384,950 (C) 3,845,927,430
(D) 7,254,396,580 (E) 5,728,496,200

(8) 一個長方體的 12 個邊長和是 160，對角線的距離為 25，求 6 個面的面積和。

大學甄選入學考試

二. 演算題：每題十分，最後一題 十二分

(1) 若已知 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ，請提出一個不要用數學歸納法而能直接導出 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的證明。

(2) 如果方程式 $x^2 + y^2 = 10x + 4y + 7$ 的圖形與方程式 $x^2 + y^2 = 16x + 12y + k$ 的圖形交集不為空集合，求 k 的所有可能值。

(3) 5 個正整數 a, b, c, d, e 的乘積為 $9!$ 且滿足

$$\begin{cases} ab + a + b = 524 \\ bc + b + c = 146 \\ cd + c + d = 104 \\ de + d + e = 149 \end{cases}$$

求 $a + b + c + d + e$ 的值。

(4) 若 $\frac{1}{10} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i}$ ， $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ，請計算所有 a_i 的值。

(5) 請問方程式 $172x + 20y = 1000$ 的正整數解有多少組？