

1-2 集合

主題一 集合的定義

一、集合的意義：

- 1.集合：當一個群體的界定很明確，而能判定組成此群體的分子(個體)時，在數學上，我們稱此群體為集合，常以 S 、 A 、 B ...等大寫英文字母來表示。
- 2.元素：集合中的分子，稱為元素。
- 3.集合的基數：有限集合 A 的元素個數稱為 A 的基數，常以 $|S|$ 或 $n(S)$ 表示之。
- 4.集合與元素的關係：若元素 x 落在集合 A 中，則稱元素 x 屬於 A ，並可將之記為「 $x \in A$ 」，其中符號「 \in 」讀成「屬於」。

二、集合的表示法：

- 1.列舉法：將集合中所有的元素列舉出來，稱為列舉法。
- 2.描述法：將集合中的元素以通式來表示。畫一條豎線，在豎線的左邊寫上我們要描述的集合元素，在豎線的右邊寫上這個集合元素的共同性質，這種表示法，稱為描述法。

【例】請用列舉法寫出所有 1、2、3 三個相異數構成的三位數的集合。

答： $\{1, 2, 3\}$

【例】請用描述法寫出滿足 $x^2 < 1$ 的所有實數 x 的集合。

答： $\{x \mid x^2 < 1\}$

【例】請同時利用列舉法及描述法表示出 1 到 5 的五個連續整數的集合。

答：(1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ；(2) $\{x \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ 且 } x \text{ 為整數}\}$ 。

三、集合的相等

- 1.定義：若 A 、 B 兩集合裡的元素完全相等，則 $A=B$ 。
- 2.兩集合 A 、 B 相等的條件為「 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ 」成立，亦即「 $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$ 」

【註】如果集合 A 中所有的元素亦落在集合 B 中，也就是說， A 中所有的元素也都是 B 的元素，則我們稱「集合 A 包含於集合 B 」，並以符號「 $A \subseteq B$ 」表示之。

【註】 $A \subseteq B$ 亦可用來表示「子集合」的關係，請見「五、子集合」的說明。

【例】考慮 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ， $B = \{x \mid |x + 1| = 2\}$ ，則 $A = B$ 。

四、空集合

1. 沒有任何元素的集合稱之為空集合，以符號 ϕ 表示之。
2. 空集合的元素個數為 0。

*特別強調， $\{0\}$ 並不是空集合，因為這個集合內含有一個元素 0；另外， $\{\phi\}$ 也不是空集合，因為這個集合內含有一個元素 ϕ 。

五、子集合（部份集合）：

1. 定義：設 A 、 B 為兩集合，當集合 A 中的每一個元素都屬於集合 B 時，我們把這種情形稱為「 A 包含於 B 」，且稱 A 是 B 的子集合，可將之記為「 $A \subseteq B$ 」，其中符號「 \subseteq 」讀成「包含於」。
2. 集合 A 的所有子集合包括集合 A 本身與空集合。
3. 空集合為任何集合的子集合。

主題二 集合的運算

一、交集、聯集、差集、補集

1. 交集 \cap ：定義 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ，即兩集合之共同元素所組成的集合。

【註】若 $A \cap B$ 沒有任何元素，則稱 A 、 B 兩集合不相交，可記為 $A \cap B = \phi$

【例】設 $A = \{1, 2, 6\}$ ， $B = \{2, 5, 6, 7\}$ ，則 $A \cap B = \{2, 6\}$ 。

2. 聯集 \cup ：定義 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ，即兩集合之所有元素所組成的集合。

【例】設 $A = \{1, 2, 6\}$ ， $B = \{2, 5, 6, 7\}$ ，則 $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ 。

3. 差集 - : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, $B - A = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$, 且具有下列兩性質 :

【例】設 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 5, 6, 7\}$, 則 $A - B = \{1\}$, $B - A = \{5, 7\}$ 。

4. 字集 : 我們將討論的全體所形成的集合稱為字集。

5. 補集 (餘集) : 若 U 為字集, 則稱 $A^C = U - A$ 為 A 的補集, 並將此集合記為 A^C 。

【例】設 $A = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$, 則 $A^C = \{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x > 3\}$ 。

二、笛摩根定理 (De Morgan's Law) :

$$1. (A \cup B)^C = A^C \cap B^C ;$$

$$2. (A \cap B)^C = A^C \cup B^C .$$

主題三 例題

【例一】設 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10\}$, $B = \{3, 7, 9, 10\}$,

試求出 $A \cap B$ 、 $A \cup B$ 、 $A - B$ 及 $B - A$ 。