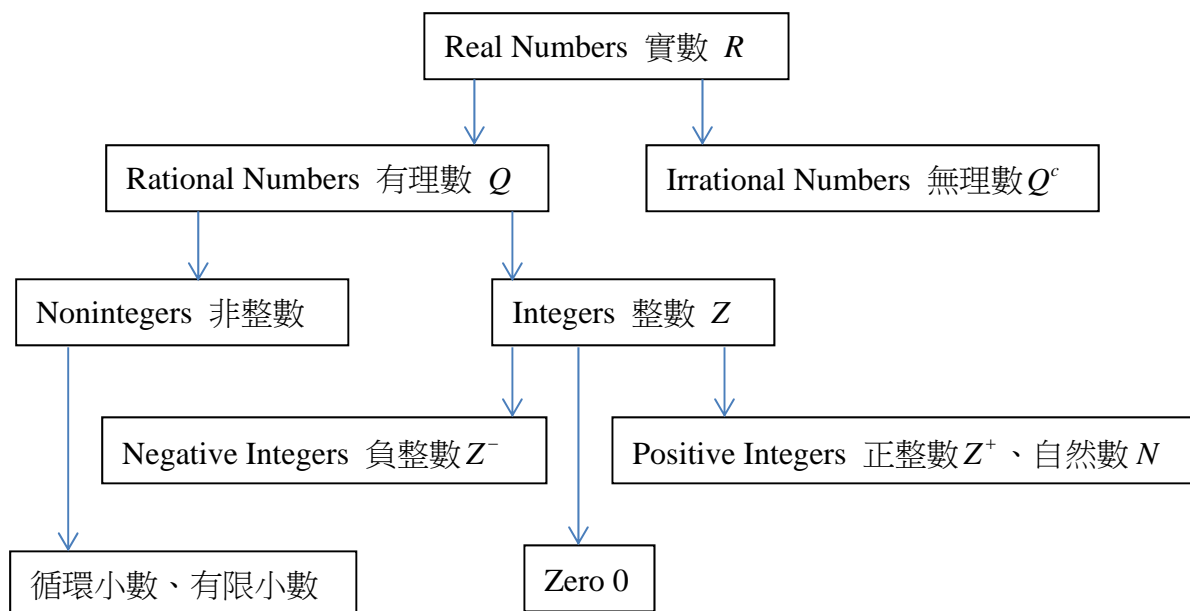


## 1-3 數與數系

## 主題一 數與數系



一、自然數 ( $N$ )：人類基於排序與計數的需求最早發展的數系，也就是正整數。

二、自然數的限制：

自然數對於加法、乘法具有封閉性，但是兩個自然數相減並不一定是自然數，為了彌補這個缺憾，我們必須發展更大的數系才能處理「兩個自然數相減不是自然數」的問題，於是整數數系的概念就因此被發展出來。

三、整數的基本性質：

若  $a, b, c$  都是任意整數，則整數滿足：

1. 三一律： $a > b$ ， $a < b$ ， $a = b$  三式恆有一式成立；
2. 遞移律：若  $a > b$  且  $b > c$ ，則  $a > c$ ；
3. 加法律： $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ ；
4. 乘法律： $c > 0$  且  $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ ， $c < 0$  且  $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ 。

四、有理數：凡是能表成形如 $\frac{a}{b}$ 的數，其中 $a, b$ 是整數，且 $b \neq 0$ 。

五、有理數的性質：

1. 設 $a, b, c, d$ 為整數且 $b \neq 0, d \neq 0$ ，則「 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ 」。
2. 整數系的基本運算性質及大小次序性質在有理數中照樣成立。
3. 有理數的運算具有封閉性。
4. 有理數的稠密性：若設 $x, y$ 為有理數且 $x < y$ ，則存在一有理數 $t$ 使得 $x < t < y$ 。

六、實數：實數可以直觀地看作小數(無論是有限的或者無限的)，它們能把數線填滿。每個實數在數線上都有唯一一個點與之對應，反過來說，數線上每一個點都對應唯一一個實數。

七、實數的大小次序：設 $x, y, z$ 均為實數，則

1. 下列三式恰有一成立： $x > y, x = y, x < y$  (三一律)；
2. 若 $x < y, y < z$ ，則 $x < z$ ；
3.  $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ ；
4. 若 $z > 0$ ，則「 $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ 」；
5. 若 $z < 0$ ，則「 $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ 」。

八、無理數：無法化成有理數的實數就稱為無理數，例如： $\sqrt{2}, \pi, e \dots$ 。

《註》實數系是由有理數與無理數所形成的集合。