

## 1-4 不等式與區間

### 主題一 不等式的解集合

1. 解集合的概念：設 $(*)$ 代表一個不等式，則所有滿足 $(*)$ 的解所成的集合，稱為不等式 $(*)$ 的解集合  
(The solutions set of the inequality)。

【例】考慮  $8x+4 < 16+5x$ ，則此不等式的解集合為  $\{x \mid x < 4\}$ 。

2. 若有兩個不等式的解集合相等，則稱此兩個不等式等價。

【例】 $|x+1| < 2$  與  $(x+3)(x-1) < 0$  為兩個等價的不等式。

3. 性質：設  $a, b \in R$ ， $c \neq 0$  且  $a < b$ ，則  $a < b$

(1)  $a+c < b+c$ ；(2) 若  $c > 0$ ，則  $ac < bc$ ；(3) 若  $c < 0$ ，則  $ac > bc$ 。

### 主題二 不等式與區間

主題一裡提到的解集合，可以用「區間」(intervals)的寫法表達。首先我們定義幾種常見的區間。

1. 開區間 (open interval)：代表集合  $\{x \mid a < x < b\}$ ，以符號  $(a, b)$  表示之。
2. 閉區間 (closed interval)：代表集合  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ ，以符號  $[a, b]$  表示之。
3. 半開區間 (half-open interval)：集合  $\{x \mid a < x \leq b\}$  與集合  $\{x \mid a \leq x < b\}$  皆稱為半開區間，前者以符號  $(a, b]$  表示之，後者以符號  $[a, b)$  表示之。
4. 無界區間 (unbounded interval)：
  - (1) 代表集合  $\{x \mid x < b\}$ ，以符號  $(-\infty, b)$  表示之；
  - (2) 代表集合  $\{x \mid x \leq b\}$ ，以符號  $(-\infty, b]$  表示之；
  - (3) 代表集合  $\{x \mid a \leq x\}$ ，以符號  $[a, \infty)$  表示之；
  - (4) 代表集合  $\{x \mid a < x\}$ ，以符號  $(a, \infty)$  表示之。
  - (5) 代表集合  $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ ，以符號  $(-\infty, \infty)$  表示之。

《註》一般而言，因為「無窮大 $\infty$ 」代表的是一個概念，而不是一個明確的數字，所以我們在微積分的學習階段只用開區間來表示無窮大的情形。

【例】 $(3,5) = \{x \mid 3 < x < 5\}$  ;  $(-1,10] = \{x \mid -1 < x \leq 10\}$  。

【例】 $(-\infty,5) = \{x \mid x < 5\}$  ;  $[\sqrt{2}, \infty) = \{x \mid \sqrt{2} \leq x\}$  。

### 主題三 解不等式

【例】解不等式  $-2 \leq 1 - 2x < 3$  。

【例】解不等式  $x^2 \geq -2x + 15$  。

【例】解不等式  $(x-4)^2(x+8)^3 \geq 0$  。

【例】解不等式  $x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$  。