

1-5 絕對值

主題一 絕對值的定義

一、絕對值 (absolute value) 的意義：

1. 若 $x \in \mathbf{R}$ ，則 x 在實數線上到原點的距離，我們記為 $|x|$ 。
2. x 在實數線上到原點的距離亦可表示為 $d(x, 0)$ ，即 $|x| = d(x, 0)$ 。

【例】若 $|x| = \sqrt{2}$ ，則 $x = \pm\sqrt{2}$ 。意即，在數線上， $\sqrt{2}$ 到原點的距離與 $-\sqrt{2}$ 到原點的距離皆為 $\sqrt{2}$ 。

$$3. |x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0 \end{cases}。$$

【例】若 $|17| = 17$ ； $|-5| = -(-5) = 5$ 。

二、若 $x \in \mathbf{R}$ ，則：(1) $|x| \geq 0$ ；

$$(2) |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0；$$

$$(3) |x| = |-x|；$$

$$(4) |xy| = |x||y|；$$

$$(5) \text{若 } y \neq 0，\text{則 } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}；$$

$$(6) |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (三角不等式)。$$

《推廣》若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，則 $d(a, b) = |b - a|$ 。例如， $d(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = |\frac{1}{2} - (-\sqrt{3})|$ 。

主題二 解絕對值方程式與絕對值不等式

一、解絕對值方程式：

我們只要利用 $|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0 \end{cases}$ ，就可以把絕對值方程式裡的絕對值拆掉，計算出我們想要的

結果。

【例】解 $|5x-3|=8$ 。

二、解絕對值不等式：

性質 設 $a \in \mathbf{R}^+$ (\mathbf{R}^+ 代表所有正實數所形成的集合)，則

(1) 若 $|x| > a$ ，則 $x > a$ 或 $x < -a$ 。

(2) 若 $|x| \leq a$ ，則 $-a \leq x \leq a$ 。

【例】解 $|5x-3| \leq 8$ 。

【例】解 $|3x+7| > 2$ 。

【例】解 $|2x+1| \leq 0$ 。

【例】試說明 1-4 節裡提到的 $|x+1| < 2$ 與 $(x+3)(x-1) < 0$ 等價，等價原因為何？