

1-6 直角坐標系

高中階段常用的二維坐標系有三種：直角坐標系、高斯平面（複數平面）、極坐標。其中直角坐標系跟極坐標都是用來描述一個物體的位置，而高斯平面是用來表示複數點的位置，作用與「實數線可標出所有的實數」相同。在大學微積分的課程裡，直角坐標系與極坐標都可能會出現（不過極坐標比較常用在理工學院的課程裡），所以在這一小節中，我們要先複習一下直角坐標系的概念，至於極坐標的部份就留待專題中再討論。

主題一 直角坐標系的基本概念

一、直角坐標系（The Rectangular Coordinate System）：

1. 直角坐標平面有四個象限。
2. 在坐標平面上標出各點的位置

【例】在坐標平面上描出下列各點的位置：(a) $(-2, -3)$ ；(b) $(-3, 0)$ ；(c) $(0, 2)$ 。

二、中點坐標與距離公式：

1. 設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 則 \overline{AB} 的中點坐標為 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ 。

【例】試求出 $A(3, -7)$, $B(-\sqrt{2}, 5)$ 的中點坐標。

2. 設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 則 A 、 B 兩點的距離為 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

【例】試求出 $\triangle ABC$ 的三邊長，其中 $A(0, 0)$, $B(7, 5)$, $C(-1, -1)$ 。

主題二 不等式的可行解區域

【例】試畫出 $|y| = 1$ 的圖形。

【例】試在 xy 平面上分別畫出滿足下列條件的圖形：(1) $|y| \geq 2$ ；(2) $xy < 0$ 。

主題三 斜率

一、斜率 (slope) 的定義：

1. 斜率代表的是一條直線傾斜的程度。
2. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 則直線 AB 之斜率 m 為 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。
3. 一直線 L 的斜率是固定的, 不會因為「所選的點改變」改變。

【例】平面上有四個點 $P(1,3)$ 、 $Q(2,5)$ 、 $R(-\sqrt{2}, 3)$ 、 $S(\sqrt{2}, 5)$, 試分別求 \overline{PQ} 、 \overline{RS} 、 \overline{PR} 的斜率。

二、斜率的正負討論：設直線 L 之斜率為 m ,

1. 斜率 m 表示 L 上一點往右移一單位, 則上升 ($m > 0$) 或下降 ($m < 0$) $|m|$ 單位。
 - (1) $m > 0$: 直線 L 由左而右逐漸上升;
 - (2) $m < 0$: 直線 L 由左而右逐漸下降;
 - (3) $m = 0$: 直線 L 為一條水平線。
 - (4) 若直線 L 為鉛垂線, 則 L 的斜率無定義。
2. $|m|$ 愈大, 則直線 L 愈陡。

三、斜率的性質：

1. A, B, C 三點共線 \Leftrightarrow 任兩點斜率相同。
2. 設二相異直線 L_1, L_2 之斜率分別為 m_1, m_2 , 則「 $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ 」。
3. 設二相異直線 L_1, L_2 之斜率分別為 m_1, m_2 , 則「 $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ 」。

主題四 直線方程式的求法

1. 點斜式：設直線 L 的斜率為 m ，且過點 (x_0, y_0) ，則 L 的方程式為 $L: y - y_0 = m(x - x_0)$ 。

【例】求過 $(3, -1)$ ，斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線方程式。

2. 二點式：設直線 L 過點 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，則 L 的方程式為 $L: \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

【例】求過 $(3, 0)$ 與 $(-4, -1)$ 的直線方程式。