2-1 有限數列與有限級數

主題一 有限數列與有限級數

一、數列（sequence）：有次序的一列數，就稱為數列。（註：數列不一定要有規律性。）

二、有限數列：一數列若只有有限多項，則稱為有限數列。例如數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$n\in N$，其中 a_1 稱為首項，a_n 稱為第 n 項（如果此數列只有 n 項，則 a_n 稱為末項）。

【例】(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$（調和數列）；

(2) 4，6，8，⋯，20；

(3) 9，27，81，243，729 均稱為有限數列。

1.等差數列：若此數列中所有後項減去前項的差均相等，則稱此數列為等差數列。

【例】(1) 2，4，6，，8，⋯，20；

(2) 3，0，－3，－6，⋯，－30。

2.等比數列：若此數列中所有後項除以前項的值均相等，則稱此數列為等比數列。

【例】(1) 1，3，9，27，81，243，729；

(2) 2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$。

三、級數：將數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以加號連接起來所形成的表示式 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 就稱為級數。

四、有限級數：由有限數列所構成的級數。

【例】由數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所構成的級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 就稱為有限級數。

1.等差級數：由等差數列所構成的級數。

【例】(1) 2 + 4 + 6 + 8 + ⋯ + 20；

(2) 3 + 0 + (－3) + (－6) + ⋯ + (－30)。

2.等比級數：由等比數列所構成的級數。

【例】(1) 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729；

(2) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$。

主題二 級數的和與Σ的性質

1.級數：把一個數列的各項用加號連接起來的數學式，稱為級數（series）。

相加所得的和，就是此級數的和。

2.Σ（讀作 sigma 或 summation)的意義：

為了比較簡潔地表達一個級數的樣子，所以我們使用了Σ來簡化級數的表達：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

設某級數共有 5 項且 $a_1 = 1^2 + 1$，$a_2 = 2^2 + 1$，$a_3 = 3^2 + 1$，$a_4 = 4^2 + 1$，$a_5 = 5^2 + 1$，則此級數的第 k 項可表示為 $a_k = k^2 + 1$。所以此級數可寫為：

$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (5^2 + 1) = \sum_{k=1}^{5}(k^2+1)$，

$\sum_{k=1}^{5}$ 讀作「sigma k 從 1 到 5」，$\sum_{k=1}^{5}(k^2+1)$ 也可以寫成 $\sum_{i=1}^{5}(i^2+1)$ 或 $\sum_{n=1}^{5}(n^2+1)$。

【例】(1) $\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = (2\times1-1)+(2\times2-1)+(2\times3-1)+(2\times4-1)+(2\times5-1)$；

(2) $\sum_{j=1}^{3}\sqrt{j^2-j+3} = \sqrt{1^2-1+3}+\sqrt{2^2-2+3}+\sqrt{3^2-3+3}$；

(3) $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$；

(4) $\sum_{k=1}^{n}4 = 4+4+\cdots+4$（共加了 n 次）；

(5) $\sum_{i=1}^{n}m_i x_i = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$。

3. Σ的性質：

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$；

(2) $\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k$；

(3) $\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n}a_k + q\sum_{k=1}^{n}b_k$。　（註：$\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k \cdot \sum_{k=1}^{n}b_k$ 是不成立的。）

4.利用Σ的概念求出級數的和，常用公式如下：

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$；

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

【例】試求出 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k-3)$ 的值。

【例】試求出下列級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{10} k^2$；(2) $\sum_{k=1}^{20}(k+1)(2k-1)$；(3) $\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k^2+1)}{n}$；(4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$。