2-2 無窮數列及其斂散性

主題一 無窮數列

1.無窮數列：一數列如果有無窮多項，就稱為無窮數列。

2.數列的表示法：一個無窮數列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，

若第 n 項的值為 a_n ，則此數列以 { a_n } 或 { a_n }$_{n=1}^{\infty}$ 表示之。

【例】數列：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ ，則此數列可以表示為 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 。

【例】等差數列：－7，－2，3，8，⋯，則此數列可以表示為 $\{5n-12\}_{n=1}^{\infty}$ 。

【例】等比數列：10，4，$\frac{8}{5},\frac{16}{25}$ ，⋯，此數列可以表示為 $\{10(\frac{2}{5})^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 。

主題二 無窮數列的收斂與發散

1.數列的極限：一個無窮數列 { a_n } ，當 n 趨近於無限大時，(記作 $n\to\infty$)，

若 a_n 的值能趨近於某一個定值 α ，我們說數列 { a_n } 的極限為 α ，記作

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ，讀作「當 n 趨近於無限大時， a_n 的極限為 α 」。

【例】數列 { $\frac{1}{n}$ } 的極限為 0，亦可寫為 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 。

【例】數列 { $\frac{n+1}{n}$ } 的極限為 1，亦可寫為 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ 。

2.無窮數列的收斂與發散：

(1)收斂數列：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ，α 為一定值，則 { a_n } 稱為收斂數列(convergent sequence)。

【例】數列 { 6 } 、 { $\frac{1}{n}$ } 、 { $\frac{n+1}{n}$ } 、 { $\frac{1}{3^n}$ } 、 { $30+\frac{1}{2k-1}$ } 均為收斂數列。

(2)發散數列：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在，則 { a_n } 稱為發散數列(divergent sequence)。

【例】數列 { n^2 } 、 { $-2n+1000000000000000$ } 、 { $(-1)^n$ } 均為發散數列。

主題二 數列極限的性質

設$\{a_n\}$及$\{b_n\}$均為收斂數列，且$c \in R$，則：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$；

(7) 若$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，則$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

【例】試求出$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 3\times 2^n}{5\times 4^n}$之值。