2-5 二項展開式

我們試著觀察下列的例子：　$x+y=x+y$；

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$；

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$；

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$；

$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$。

在$(x+y)^n$的展開式裡係數是有關連性的，我們可以從這樣的展開式裡畫出巴斯卡三角形：

1	$(x+y)^0=1$
1　1	$(x+y)^1=x+y$
1　2　1	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
1　3　3　1	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
1　4　6　4　1	$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
1　5　10　10　5　1	$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

但如果$(x+y)^n$的次方很大，我們當然不可能一直畫出巴斯卡三角形來找它的展開式係數，所以我們必須介紹一個重要的展開式－二項展開式，有了它，就可以幫助我們快速地寫出$(x+y)^n$展開後的樣子。

由於 $(x+y)^n$是$(x+y)$連乘 n 次的結果，即$(x+y)^n=(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$，所以我們討論一下$x^ky^{n-k}$是怎麼來的。例如：

$$(x+y)^5=(\underline{x}+y)(\underline{x}+y)(x+\underline{y})(x+\underline{y})(x+\underline{y})$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

$$x\quad x\quad y\quad y\quad y\qquad \text{乘起來為 } x^2y^3$$

$$(x+y)^5=(\underline{x}+y)(x+\underline{y})(x+\underline{y})(x+\underline{y})(x+\underline{y})$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

$$x\quad y\quad y\quad y\quad y\qquad \text{乘起來為 } xy^4$$

從上面的例子可知，$(x+y)^n=(x+y)\ (x+y)\ (x+y)\cdots(x+y)$這 n 個$(x+y)$裡，每一個$(x+y)$都可以任意選擇要取出 x 還是要取出 y，然後把 n 個$(x+y)$裡分別取到的 x 與 y（x 的個數與 y 的個數加起來一定是 n）乘起來，就可以得到我們想要的 $x^k y^{n-k}$ 。

由於 $x^k y^{n-k}$ 是由 k 個 x 與 $n-k$ 個 y 連乘之後所組成的，這 k 個 x 是從 n 個$(x+y)$裡任取 k 個出來所得到的結果，

那麼 $x^k y^{n-k}$ 項的係數會是多少呢？ $x^k y^{n-k}$ 項的係數代表的是「到底有幾個 $x^k y^{n-k}$ 項」，這裡提到的「幾個」，就是 $x^k y^{n-k}$ 項的係數。從排列組合的觀點思考，我們現在有 n 個$(x+y)$，每一個$(x+y)$都可以取出 x、y 的其中一數，所以如果最後會有 k 個 x 被取出來，取法就會有 C_k^n 種。

也就是說， $x^k y^{n-k}$ 項的係數就是 C_k^n 。

《註》 $C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ，其中 n 為正整數，k 為非負整數，$n\geq k$ 。

C_k^n 代表的是「從 n 個相異物中任取 k 個的取法有 C_k^n 種」。

二項展開式

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \\
&= C_0^n x^0 y^n + C_1^n x^1 y^{n-1} + \cdots + C_k^n x^k y^{n-k} + \cdots + C_{n-1}^n x^{n-1} y^1 + C_n^n x^n y^0
\end{aligned}
$$

稱為 $(x+y)^n$ 的二項展開式。

【例】$(x+y)^{100}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{100} C_k^{100} x^k y^{100-k} = C_{100}^{100} x^{100} y^0 + C_{99}^{100} x^{99} y^1 + C_{98}^{100} x^{98} y^2 + \cdots + C_0^{100} x^0 y^{100}$

《１》由於 $C_k^n = C_{n-k}^n$ ，所以我們亦可將二項展開式寫成

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \\
&= C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_{n-k}^n x^k y^{n-k} + \cdots + C_n^n x^0 y^n
\end{aligned}
$$

《２》另一個常用的展開式： $(1+x)^n = C_0^n x^0 + C_1^n x^1 + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k$

【例】試求 $(x+2y)^7$ 的展開式中 $x^5 y^2$ 的係數。