3-1、3-2 函數的基本概念

假設我們有一條 100 公尺長的繩子，想要利用它圍出一個周長為 100 公尺的矩形，請問在長、寬各是多少公尺的情形下，我們可以圍出矩形的最大面積？

針對這個問題，我們可以先假設矩形的長為x公尺，寬為$50-x$公尺，如此，矩形的面積就會是$x(50-x)$。如果假設矩形的面積叫做y平方公尺，則$y=x(50-x)$形成一種對應關係。

因為y值隨著x而改變，取不同的x時就能得到不同的y，所以我們可以把x稱為自變數（independent variable），y稱為應變數（dependent variable，因應x的改變而跟著一起改變的數），像$y=f(x)=x(50-x)$這樣的對應關係就稱為函數（function）。

由於長寬都是正數，所以$x>0$且$50-x>0$，也就是說$0<x<50$，x的值必須介於0與50之間，所以x有了範圍限制，這個範圍上的限制就叫做函數$f(x)$的定義域（domain）。

有了x，我們就可以把相對應的y值計算出來，所有可能的y值所形成的集合，就叫做函數$f(x)$的值域（range）。

想要計算矩形的最大面積，相當於要求函數$f(x)$的最大值。求一個函數的最大最小值或是局部（相對）的極大極小值是非常常見的問題。我們先把現實生活中遇到的問題寫成函數的形式，再去分析函數的特性或極值，就可以得到一些重要的資訊並對未來的趨勢加以預測。

但在這個過程裡，微積分扮演著什麼角色呢？

以$f(x)=x(50-x)=-x^2+50x$來說，我們可以用配方法把它化簡成$f(x)=-(x-25)^2+625$，然後由「二次函數的圖形的特性」得知當$x=25$時，$f(x)$有最大值625，這是我們從前學過的技巧。但往後遇到的$f(x)$不見得是二次函數，可能是更高次的多項函數、指對數函數或是三角函數，我們又該用什麼樣的工具計算那些函數的最大最小值或是局部極值呢？這個問題的答案，就是微分。

我們可以利用微分的技術，計算出函數們的最大最小值或者局部極值，這也是我們學習微分時重要的目標之一。但在這裡我們不提太多跟微分有關的事，還是先從函數的基本觀念談起，同學們必須先瞭解函數有哪些重要的性質，之後才能體會微分學在函數上的妙用。

主題一 自變數與應變數

1. 設 A 、 B 為兩個非空集合，若對於每一個 $x \in A$，恰有一個 $y \in B$ 作為 x 的對應元素，這種對應方式叫做從 A 映至 B 的一個函數，以 $f: A \to B$ 表示。
2. 一般而言，若 x 、 y 表示二個變數，且每個 x 值都有一個且只有一個對應的 y 值，則稱 y 是 x 的函數，其中 x 為自變數， y 為應變數。
3. 我們可以用 x 、 y 來表示成函數的變數，也可以用其他的文字符號。

   例如， $x = x(t) = 2t - 1$，此時 x 是 t 的函數。

   $x = g(y) = 2y^2 + 1$ ，此時 x 是 y 的函數。

   $z = z(\theta) = \sin\theta$ ，此時 z 是 θ 的函數。

【例】我們假設 t 為時間（單位為秒）， x 是位置（單位為公分），然後某人的移動軌跡，時間與位置的關係如下： $x = x(t) = t^2 + 2t - 1$。此時 t 與 x 形成了一組函數關係，且 x 是 t 的函數。t 在這個函數關係中的角色是自變數， x 是應變數。由時間來當自變數是很好的選擇，因為時間是自己在改變的，沒有任何外力能讓時間停止或跳躍（白金之星與克里姆王除外）。

主題二 定義域與值域

1. 定義域與對應域：設 f 是從 A 映至 B 的函數，則 A 叫做 f 的定義域， B 叫做 f 的對應域。
2. 值域：設 f 是從 A 映至 B 的函數， $a \in A$ ， $b \in B$ ，且 a 經過 f 的作用對應到 b ，則 b 稱為 a 對函數 f 的函數值，以 $f(a)$ 表示之。 A 中所有元素的函數值所成的集合叫做 f 的值域，以 $f(A)$ 表示。我們很容易可以知道 $f(A) \subset B$ 。

【例】回到最早的問題，函數 $y = f(x) = x(50 - x)$ ，則我們有興趣的部份是：

(1)自變數與應變數；

(2) x 的範圍限制（函數 $f(x)$ 的定義域）；

(3)問題解決（例如，求極值）。

3. 一般而言，若 y 為 x 的函數，描述 y 與 x 的對應關係時，也應指明 x 的範圍(即定義域)，若 x 的範圍沒有特別指明，則是指可使 $y = f(x)$ 為實數值的所有數所成的集合。

【例】找出下列函數之定義域： $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ ， $g(t)=\dfrac{2t+6}{t^2-3t-4}$ 。

【例】找出下列函數之定義域與值域： $f(x)=\sqrt{2x+3}$ ， $h(x)=\sin x$ 。