3-3 判斷函數的方法

主題一 判斷函數的方法

1. 函數的對應方式：函數可以一對一，多對一，但不能夠一對多。

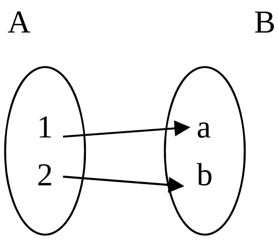
回到上一節曾提到的例子：假設t為時間（單位為秒），x是位置（單位為公分），然後某人的移動軌跡，時間與位置的關係如下：$x = x(t) = t^2 + 2t - 1$。

為什麼函數一對一跟多對一是合理的呢？因為我們可以在某個時間走到某個位置，而且這個位置之後都不會再走到，這就是一對一的概念。我們也可以在不同的時間走到相同的位置，也就是同一個位置被走到了好幾次，這就是多對一的概念。

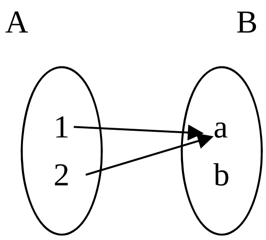
但我們不可能在同一個時間出現在不同的位置，這已經脫離現實的世界了！一個t不能對應多個x，所以函數不能夠一對多。

【例】下列何者為函數關係：

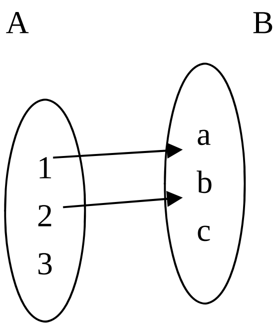
(A)



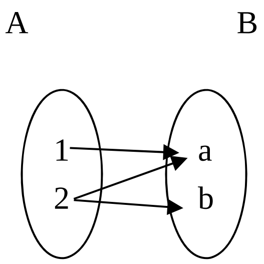
(B)



(C)



(D)



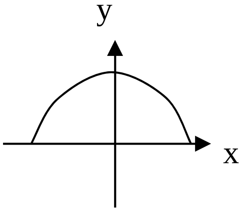
答：AB

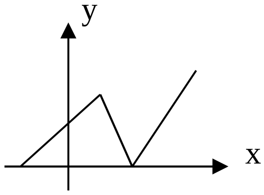
《註》C 不是函數的原因是「定義域中所有的數一定要對應出去」，所以 3 一定要對應出去才行。

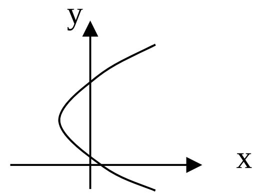
D 不是函數的原因是「一對多」。

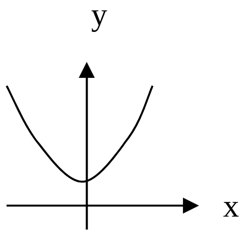
2. 從圖形判斷函數的方法

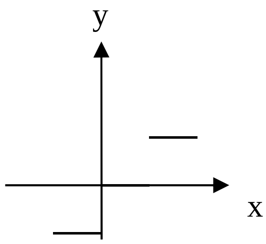
【例】下列各圖，何者為函數圖形？(y 是 x 的函數)

(A)


(B)


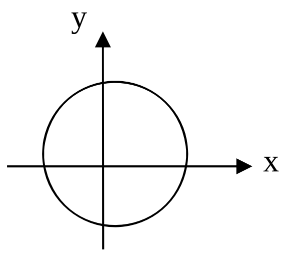
(C)


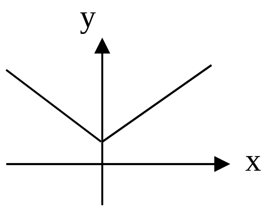
(D)


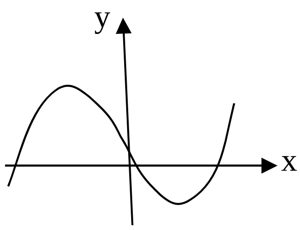
(E)


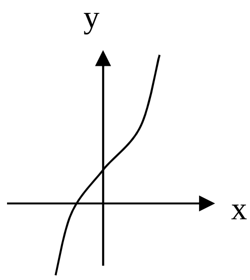
答：ABDE

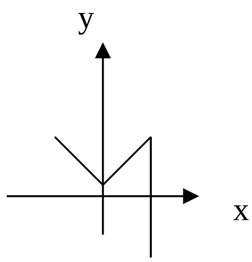
【例】下列各圖，何者為函數圖形？(y 是 x 的函數)

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答：BCD

主題二 函數圖形的分析重點

一般而言，函數圖形的分析重點大致如下：

1. 對稱性；
2. 與兩軸的交點；
3. 遞增遞減性；
4. 最大最小值及局部極值（相對極值）；
5. 凹口方向與反曲點；
6. 漸近線。

名稱	本課程之章節	未來將使用的微分工具	備註
對稱性	3-5-5 奇函數與偶函數	無	1.奇函數的圖形會對原點對稱，偶函數的圖形會對 y 軸對稱。 2.奇函數在[-a, a]上的積分為 0，偶函數在[-a, a]上的積分為在[0, a]上的積分值的兩倍
與兩軸的交點	3-3-2 函數交點的計算 6-2 多項函數圖形與兩軸的交點	無	
遞增遞減性	3-3-3 函數的遞增遞減性	一次微分	
極值	3-3-4 相對極值	一次微分	
凹口方向 反曲點	無	二次微分	
漸近線	6-5 漸近線	函數的極限	利用極限的計算，找出函數圖形的水平漸近線、垂直漸近線與斜漸近線

主題三 相關的定義

一、函數的遞增與遞減：

1. 設 $f:A\to R$，若對於所有的 x_1、$x_2\in A$，當 $x_1<x_2$ 時恆有 $f(x_1)\le f(x_2)$，則稱 f 為遞增函數（increasing function）。
2. 設 $f:A\to R$，若對於所有的 x_1、$x_2\in A$，當 $x_1<x_2$ 時恆有 $f(x_1)\ge f(x_2)$，則稱 f 為遞減函數（decreasing function）。
3. 設 $f:A\to R$，若對於所有的 x_1、$x_2\in A$，當 $x_1<x_2$ 時恆有 $f(x_1)<f(x_2)$，則稱 f 為嚴格遞增函數（strictly increasing function）。
4. 設 $f:A\to R$，若對於所有的 x_1、$x_2\in A$，當 $x_1<x_2$ 時恆有 $f(x_1)>f(x_2)$，則稱 f 為嚴格遞減函數（strictly decreasing function）。
5. 設 $f:A\to R$，若對於所有的 $x_1\ne x_2$ 恆有 $f(x_1)=f(x_2)$，則稱 f 為常數函數（constant function）。

《註》f 的定義域 A 可以是 R，也可以是 $[a,b]$。

二、最大值與最小值（absolute maximum and absolute minimum）：

1.設 $f:A\to R$ 且 $k\in A$，若對於所有的 $x\in A$ 恆有 $f(x)\le f(k)$，則稱 f 在 k 處有最大值 $f(k)$。

2.設 $f:A\to R$ 且 $k\in A$，若對於所有的 $x\in A$ 恆有 $f(x)\ge f(k)$，則稱 f 在 k 處有最小值 $f(k)$。

《註》最大值又稱為絕對極大值；最小值又稱為絕對極小值。

三、相對極大值與相對極小值（relative maximum and relative minimum）：

1.設 $f:A\to R$ 且 $k\in A$，若 A 中存在包含 k 的開區間 I，使得對於所有的 $x\in I$ 恆有 $f(x)\le f(k)$，則稱 f 在 k 處有相對極大值 $f(k)$。

2.設 $f:A\to R$ 且 $k\in A$，若 A 中存在包含 k 的開區間 I，使得對於所有的 $x\in I$ 恆有 $f(x)\ge f(k)$，則稱 f 在 k 處有相對極小值 $f(k)$。

《註》相對極大值又稱為局部極大值；相對極小值又稱為局部極小值。

四、奇函數與偶函數：

1.若函數 f 滿足 $f(-x)=f(x)$ ，則 f 稱為偶函數（even function）。

2.若函數 f 滿足 $f(-x)=-f(x)$ ，則 f 稱為奇函數（odd function）。

3.偶函數的圖形對 y 軸對稱；奇函數的圖形對原點對稱。

【例】 $f(x)=|x|$ 、 $g(x)=\cos x$ 、 $h(x)=x^2$ 為偶函數。

【例】 $f(x)=x$ 、 $g(x)=\sin x$ 、 $h(x)=x^3$ 為奇函數。