5-1 曲線下的面積與定積分

本章我們將進入微積分另一個重要的領域：積分。人類最初使用積分學解決的問題，就是面積、體積與曲線長度。為了能更清楚地描述「定積分」的定義，我們先從計算平面上某區域的面積出發，利用大家所熟悉的長方形面積計算方式，試著將題目定義的曲線下面積求出來。

值得注意的是，我們雖然利用了「函數與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的面積」引入定積分的定義，但「函數與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的面積」卻非定積分的定義。

主題一 非負連續函數曲線下的面積

考慮連續函數 $f:[a,b]\to R^{+}\cup\{0\}$（意即，在 $[a,b]$ 上的 $f(x)\geq 0$，R^{+} 是指所有正實數所形成的集合），欲求 $f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的面積 A，做法步驟如下：

1. 先將 $[a,b]$ 分成 n 等分，即每一個等分區間的長度為 $\dfrac{b-a}{n}$。
2. 因為第 1 個區間為 $[a,a+\dfrac{b-a}{n}\times 1]$，第 2 個區間為 $[a+\dfrac{b-a}{n}\times 1,a+\dfrac{b-a}{n}\times 2]$，…，第 n 個區間為 $[a+\dfrac{b-a}{n}\times(n-1),b]$，所以我們可以把第 i 個區間寫為 $[a+\dfrac{b-a}{n}\times(i-1),a+\dfrac{b-a}{n}\times i]$。
3. 在每一個等分區間內取 $f(x)$ 的最大值，並令第 i 個區間裡 $f(x)$ 的最大值為 M_i。
4. 我們以第 i 個區間的長度 $\dfrac{b-a}{n}$ 為寬，第 i 個區間裡 $f(x)$ 的最大值 M_i 為長，並寫出這個矩形的面積 $M_i(\dfrac{b-a}{n})$。
5. 把這 n 個矩形面積相加可得 $M_1(\dfrac{b-a}{n})+M_2(\dfrac{b-a}{n})+\cdots+M_n(\dfrac{b-a}{n})=\sum_{i=1}^{n}M_i(\dfrac{b-a}{n})$，我們將 $\sum_{i=1}^{n}M_i(\dfrac{b-a}{n})$ 定義為上和（upper sum）。
6. 用同樣的方法，令第 i 個區間裡 $f(x)$ 的最小值為 m_i。
7. 我們以第 i 個區間的長度 $\dfrac{b-a}{n}$ 為寬，第 i 個區間裡 $f(x)$ 的最小值 m_i 為長，並寫出這個矩形的面積為 $m_i\ (\dfrac{b-a}{n})$。

8. 把這n個矩形面積相加可得$m_1(\frac{b-a}{n})+m_2(\frac{b-a}{n})+\cdots+m_n(\frac{b-a}{n})=\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})$，我們將$\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})$定義為下和（lower sum）。

9. 明顯地，$\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})\le A\le\sum_{i=1}^{n}M_i(\frac{b-a}{n})$，即「下和$\le A\le$上和」。

10. 令$n\to\infty$，若$\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})\}=\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^{n}M_i(\frac{b-a}{n})\}=l$，即$\lim_{n\to\infty}\{$下和$\}=\lim_{n\to\infty}\{$上和$\}=l$，則由夾擠定理，我們可以得到欲求的面積$A=l$。

【例】設$y=f(x)=x^2$與x軸、$x=0$、$x=2$所圍成的面積為A，

(1) 將 [0,2] 分成 4 等分，求上和及下和。

(2) 將 [0,2] 分成 n 等分，求上和及下和。

(3) 求A值。

主題二 定積分

考慮一般的連續函數$f:[a,b]\to R$：

1. 先把$[a,b]$分成 n 等分，則每一個等分區間的長度為$\frac{b-a}{n}$。
2. 同樣定義出上和$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(\frac{b-a}{n})$與下和$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})$，其中$M_i$為第$i$個區間裡$f(x)$的最大值，$m_i$為第$i$個區間裡$f(x)$的最小值，此時$M_i$、$m_i$不一定為正數。
3. 明顯地，$\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})\le A\le\sum_{i=1}^{n}M_i(\frac{b-a}{n})$，即「下和$\le A\le$上和」。
4. 令$n\to\infty$，若$\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^{n}m_i(\frac{b-a}{n})\}=\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=1}^{n}M_i(\frac{b-a}{n})\}=l$，即$\lim_{n\to\infty}\{$下和$\}=\lim_{n\to\infty}\{$上和$\}=l$，則由夾擠定理，我們稱$l$為$f(x)$在 $[a,b]$ 上的定積分，以$l=\int_a^b f(x)dx$表示之。

   其中a稱為積分下限，b稱為積分上限，$f(x)$稱為被積函數。

定義 若$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}L_n=l$，則$l$可稱為$f(x)$在 $[a,b]$ 上的定積分，或稱函數$f(x)$在 $[a,b]$ 上可積分，且l可用符號$\int_a^b f(x)dx$表示之，即$l=\int_a^b f(x)dx$。