6-1、6-2 多項函數圖形與兩軸的交點

主題一 多項函數的定義

一、若變數 y 為變數 x 的函數，且 y 可以用 x 的一個多項式 $f(x)$表示，即 $y=f(x)$，這樣的函數就稱為多項函數。

二、通常由多項式 $f(x)$所定的多項函數就稱函數 f，由多項式 $g(x)$所定的多項函數就稱函數 g，…等，定一個多項函數 f 所用的多項式 $f(x)$若為 n 次，則 f 稱為 n 次函數。

【例】$f(x)=\dfrac{9}{5}x+32$ 為一次函數或線型函數；$g(x)=-x^2+10x$ 為二次函數；

$h(\mathrm{x})=2x^3-x^2-4x+5$ 為三次函數。

三、一般而言，我們可將 n 次函數表示為：$y=f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$。

四、由零多項式所定的函數，稱為零函數，即 $y=f(x)=0$，零函數的函數值恆為 0。

五、函數 $y=f(x)$，將變數 x 的範圍內的每一個值 a，在坐標平面上取點$(a，f(a))$，則所有這樣的點所成的圖形稱為函數 f 的圖形。

六、多項函數圖形的一些性質：

1. 多項函數的圖形是連續不斷的。
2. n 次函數的圖形與 x 軸至多有 n 個交點。
3. 多項函數的領導係數若為正數，則函數圖形最右方是上揚的（即 x 夠大時，函數值會趨近於無窮大），領導係數若為負數，則函數圖形最右方是往下跑的。

主題二 多項函數圖形與兩軸的交點

一、與 y 軸的交點（或者我們稱之為「截點」，y-intercepts）：

將 $x=0$ 代入 $y=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，可得到 $y=a_0$，

所以 n 次多項函數（或簡稱 n 次函數）與 y 軸必交於一點 $(0,\ a_0)$。

二、與 x 軸的交點（或者我們稱之為「截點」，x-intercepts）：

將 $y=0$ 代入 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

可得到 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$。

所以 n 次函數與 x 軸的交點個數取決於 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的實數根個數，

而 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的實數根即 n 次函數與 x 軸的交點 x 坐標。

【例】設 $f(x)=2x-3$，$g(x)=-x^2+4x+5$，$h(x)=x^2+x+1$，

試分別求出此三函數圖形與 x 軸及 y 軸的交點。

《補充一》設 a、b、$c\in R$，試分析 $ax^2+bx+c=0$ 的根：

1.我們可利用配方法導出 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

2.由 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中之 $\sqrt{b^2-4ac}$ 值判斷出：

(i) 若 $b^2-4ac>0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 有兩相異實根。

$\Rightarrow$ $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸相交於相異兩點。

(ii) 若 $b^2-4ac=0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 有重根。

$\Rightarrow$ $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸相交於一點（即相切於頂點）。

(iii) 若 $b^2-4ac<0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 無實數根（但有兩共軛虛根）。

$\Rightarrow$ $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸無交點。

《補充二》二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$

1.定義：函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、$c\in R$，且 $a\neq 0$，即為一個二次函數。

2.$a\in R$，$a\neq 0$，二次函數 $y=ax^2$ 的圖形均為拋物線：

(1)當 $a>0$ 時，拋物線開口向上；當 $a<0$ 時，拋物線開口向下。

(2)當｜a｜愈大，圖形開口愈小；當｜a｜愈小，圖形開口愈大。

(3)圖形對稱於 y 軸，y 軸稱為拋物線 $y=ax^2$ 的對稱軸。

(4)圖形的頂點為原點(0，0)。

(5) $y=ax^2$ 與 $y=-ax^2$ 的圖形對稱為 x 軸。

3. $a\in R$，$a\neq 0$，二次函數 $y=a(x-h)^2$ 的圖形為拋物線：

(1)若 $f(x)=ax^2$，$g(x)=a(x-h)^2$，則 g 的圖形即為 f 的圖形左右平移｜h｜單位。

(若 $h>0$，則向右平移；若 $h<0$，則向左平移。)

【例】$f(x)=2x^2$，$g(x)=2(x-1)^2$，則 g 的圖形即為 f 的圖形向右平移 1 單位。

(2) $y=a(x-h)^2$ 的圖形為一拋物線，其對稱軸為 $x=h$，頂點為(h，0)。

4. $a\in R$，$a\neq 0$，二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形為拋物線：

(1) 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形即 $y=ax^2$ 的圖形向左或向右平移｜h｜單位（若 $h>0$，則向右平移；若 $h<0$，則向左平移），再向上或向下平移｜k｜單位（若 $k>0$，則向上平移；若 $k<0$，則向下平移）所得的圖形。

【例】$y=2(x-1)^2+3$ 的圖形即 $y=2x^2$ 的圖形向右平移 1 單位再向上平移 3 單位。

(2) $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形為一拋物線，其對稱軸為 $x=h$，頂點為(h，k)。

5. $y=ax^2+bx+c$ 可經由配方，化為 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，

即 $y=a(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2-4ac}{4a}$。

6.二次函數的圖形均為拋物線，對稱軸為 $x=-\frac{b}{2a}$，頂點為 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$。

7.當 $a>0$，開口向上，頂點是最低點，函數的最小值為 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$。

當 $a<0$，開口向下，頂點是最高點，函數的最大值為 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$。