E-2 e 的性質

大部份學生在學習數學的過程裡都會用到無理數π，$\pi=3.141592654\cdots$，不過我們在這一節要介紹另一個無理數e，$e=2.718281828459\cdots$，而且e在微積分學裡扮演著相同重要的角色，它的重要性甚至大過於我們所熟知的π。那麼，到底什麼是e？e的值又是怎麼制定出來的呢？

定義 $e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$

也就是說，假設 $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$，則當x趨近於無窮大時，$f(x)$所逼近的值就是e。

我們可以利用簡單的變數變換讓e的樣子稍有不同。令$h=\dfrac{1}{x}$，則當x趨近於無窮大時h會趨近於 0，所以原本的$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$可被寫成$\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$的形態，即：

$$e=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

因為$e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$，所以當$h$趨近於 0 時我們有$e\approx(1+h)^{\frac{1}{h}}$，兩邊同時乘以$h$次方可得$e^h\approx 1+h$，所以$e^h-1\approx h$，即當$h$趨近於 0 時$\dfrac{e^h-1}{h}\approx 1$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$。所以接下來，我們要利用前面的結論找出指數函數$f(x)=e^x$的導函數。

【例】試求出指數函數 $f(x)=e^x$ 的導函數。

【解法】我們從前學過 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，欲求 $f(x)=e^x$ 的導函數也是相同的做法。

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\{e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}\}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\\&=e^x\end{aligned}$$

所以 $f(x)=e^x$ 之導函數為 $f'(x)=e^x$。 □

在高中階段，我們很常用到「以 10 為底」的常用對數$\log_{10} x$，不過之後我們在微積分學裡更常會用到的是「以e為底」的自然對數$\log_e x$，而且我們通常把$\log_e x$寫成$\ln x$的形態，其中 $y=\ln x$ 代表的是 $x=e^y$ 。

附帶一提的是，$f(x)=e^x$ 稱為自然指數函數（The Natural Exponential Function），$f(x)=\ln x$ 稱為自然對數函數（The Natural Logarithm Function）。

我們從前也曾提過一些判斷函數圖形的技巧跟重點，像是考慮圖形的對稱性（利用奇、偶函數的概念）、與兩軸的交點、極值、凹口方向或者漸近線。以下我們就來試著利用先前所提過的觀念，大致上畫出指數函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 的圖形。

【例】試畫出指數函數 $f(x)=e^{-x^2}$ 的圖形。