T-1、T-2 三角函數的定義

主題一 銳角三角函數的定義

1.若直角三角形的一個銳角為θ，則對邊，鄰邊，斜邊兩兩的比值都可由θ決定。因為三角形共有三個邊長，所以兩兩的比值共有六個：

(1) $\dfrac{對邊}{斜邊}$，稱為θ的正弦，以$\sin\theta$表示，即$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$。

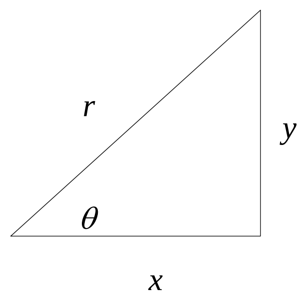
(2) $\dfrac{鄰邊}{斜邊}$，稱為θ的餘弦，以$\cos\theta$表示，即$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$。

(3) $\dfrac{對邊}{鄰邊}$，稱為θ的正切，以$\tan\theta$表示，即$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$。

(4) $\dfrac{鄰邊}{對邊}$，稱為θ的餘切，以$\cot\theta$表示，即$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$。

(5) $\dfrac{斜邊}{鄰邊}$，稱為θ的正割，以$\sec\theta$表示，即$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$。

(6) $\dfrac{斜邊}{對邊}$，稱為θ的餘割，以$\csc\theta$表示，即$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

【例】設θ為銳角，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，試求出$\sin\theta$、$\tan\theta$與$\sec\theta$。

2.銳角三角函數的倒數關係：

(1) $\sin\theta$ 與 $\csc\theta$ 互為倒數，即：$\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$。

(2) $\cos\theta$ 與 $\sec\theta$ 互為倒數，即：$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$。

(3) $\tan\theta$ 與 $\cot\theta$ 互為倒數，即：$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$。

3.平方關係：

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$；(2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$；(3) $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$。

【註】我們以 $\sin^2\theta$ 與 $\cos^2\theta$ 分別表示 $(\sin\theta)^2$ 與 $(\cos\theta)^2$，

為了簡便，$(\sin\theta)^n$ 常以 $\sin^n\theta$ 表示，其他三角函數亦同。

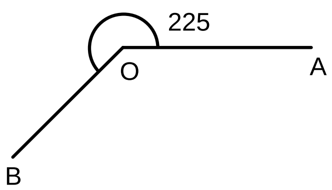
4.商數關係：$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$；$\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$。

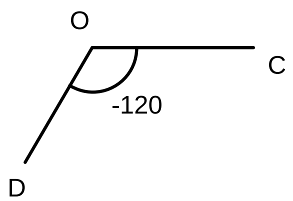
主題二 有向角、廣義角與同界角

1.有向角：

(1) 在平面上將一射線 OA 繞端點 O，沿著一個固定的方向旋轉到射線 OB 上，就形成一個有向角。我們稱射線 OA 為始邊，OB 為終邊，而旋轉量就是此有向角的角度，並規定逆時針方向旋轉的旋轉量是正的，順時針方向旋轉的旋轉量是負的。

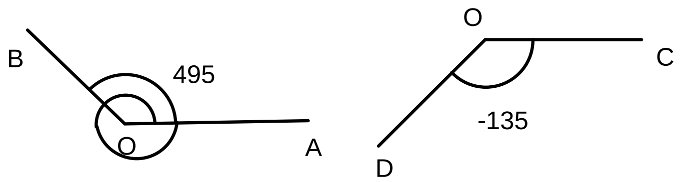
(2) 旋轉量是正的角稱為正向角或簡稱為正角，旋轉量是負的角稱為負向角或簡稱為負角，正向角與負向角統稱為有向角。





2.廣義角：旋轉時可以是逆時針或順時針方向旋轉半圈，一圈，一圈半，二圈，…等，

因此旋轉量可為 $\pm180^\circ$，$\pm360^\circ$，$\pm540^\circ$，$\pm720^\circ$，…。



像這樣得出的有向角有正向角與負向角之分，且度數也不限於 0°到 180°之間，我們稱之為廣義角。

3.同界角：

(1) 在坐標平面上談有向角時，通常以 x 軸的正方向為始邊。設我們將兩個廣義角 θ,ϕ 的頂點都放在坐標平面的原點上，且將它們的始邊都放在 x 軸的正向上，若它們的終邊重疊，則這樣的兩個廣義角就叫做同界角。

(2) 一般而言，若一個有向角的角度為 θ，則所有角度為 $\theta+360^\circ n$ 的有向角都是它的同界角，其中 n 為整數。換句話說，同界角就是角度差為 360°的整數倍的角。

【例】下列角度皆是 30°的同界角：－1050°、－690°、－330°、390°、750°⋯

所有形如 $30^\circ+360^\circ n$（其中 n 為整數）的角都是 30°的同界角，所以 30°的同界角有無限多個。

主題三 度度量與弧度度量

1.弧度的定義：

《說明》一個半徑為 r 的輪子，當轉動一圈時，滾動的弧長 $s=2\pi r$，即 $\dfrac{s}{r}=2\pi$；

當轉動 5 圈時，滾動的弧長 $s=5(2\pi r)$，即 $\dfrac{s}{r}=5(2\pi)$；

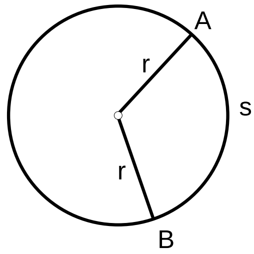
當轉動 $\dfrac{3}{7}$ 圈時，滾動的弧長 $s=\dfrac{3}{7}(2\pi r)$，即 $\dfrac{s}{r}=\dfrac{3}{7}(2\pi)$。

一般而言，轉動 x 圈時，$\dfrac{s}{r}=x(2\pi)$，

由此可知，$\dfrac{s}{r}$ 與轉動的圈數成正比，因此，$\dfrac{s}{r}$ 可用來表示旋轉量的大小。

《定義》當 $\dfrac{s}{r}=1$ 時，我們稱旋轉量為 1 弧度，當 $\dfrac{s}{r}=\theta$ 時，我們稱旋轉量為 θ 弧度。

也就是說，我們可以將與半徑等長的圓弧所對的圓心角稱為 1 弧度，如此，由於整個圓周長為 2π，所以整個圓周長所對的圓心角就是 2π（弧度）。



【例】當 $\dfrac{s}{r}=\sqrt{2}$，我們稱旋轉量為 $\sqrt{2}$ 弧度；

當 $\dfrac{s}{r}=\dfrac{3}{7}\pi$，我們稱旋轉量為 $\dfrac{3}{7}\pi$ 弧度。

2.弧度與度（°）的單位換算：

當轉動一圈時，$\dfrac{s}{r}=2\pi$，所以轉一圈就是轉 2π 弧度，度與弧度都是旋轉量的單位。

旋轉量以弧度為單位時，也可以用正負符號表示旋轉的方向。

【例】旋轉 10 弧度就是逆時針旋轉，而旋轉的弧長是半徑的 10 倍；

【例】旋轉－10 弧度就是順時針旋轉，而旋轉的弧長也是半徑的 10 倍。

因為 $360^\circ=2\pi$ 弧度 $\Rightarrow 180^\circ=\pi$ 弧度。

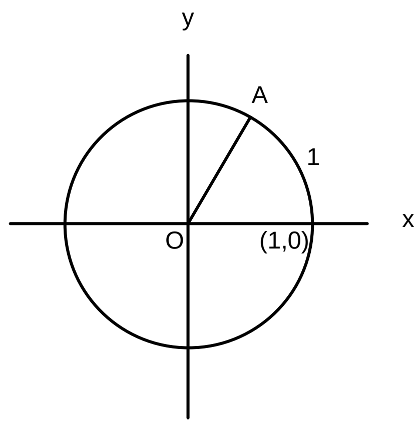
所以，$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 $\approx\dfrac{3.14159}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度。

1 弧度 $=(\dfrac{180}{\pi})^\circ \approx (\dfrac{180}{3.14159})^\circ \approx 57.2958^\circ$。

$\boxed{\text{結論}}$ 設 x 為度度量，θ 為弧度度量，則 x 與 θ 互換的方法為 $\dfrac{x}{360^\circ}=\dfrac{\theta}{2\pi}$。

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π

3.作一個單位圓，此圓與 x 軸正向交於點(1，0)，在圓弧上由此點出發逆時針方向走 1 單位長，假設到達 A 點，此時旋轉的弧長恰等於半徑，因此由原點 O 指向 A 的射線，即為 1 弧度的終邊。一般而言，若 θ 是一個實數，則由點(1，0)出發，在圓弧上繞行，$\theta>0$ 就逆時針轉，$\theta<0$ 就順時針轉，當繞行的弧長為｜θ｜時，假設到達 P 點，則射線 OP 即為有向角 θ (弧度)的終邊。由此可知，有向角的弧度可以是任意實數。



4.有向角為 θ 弧度的有向角：以弧度為單位時，一整圈是 2π，因此，若兩個有向角的弧度差 2π 的整數倍時，就是同界角。即，有向角 ϕ 是 θ 的同界角的充要條件為：$\phi=\theta+2n\pi$，其中 n 為整數。

5.度（°）與弧度都可以度量有向角的旋轉量，也都可以度量無向角的大小，若某無向角介於 0°與 180°之間，換成弧度來看，也就是介於 0(弧度)與 π (弧度)之間。

主題四 廣義角三角函數的定義

1.定義：當 θ 為任意廣義角時，我們可以將其頂點放在坐標平面的原點，始邊放在 x 軸的正向上，其終邊可能落在四個象限或 x 軸，y 軸上。我們定義其三角函數值如下：

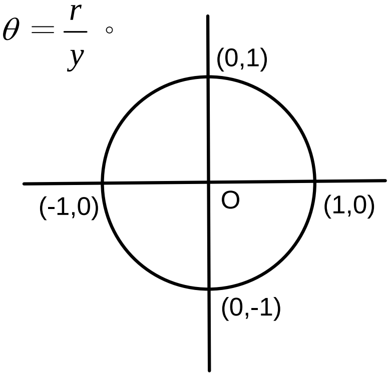
(1) 當廣義角 θ 的終邊落在四個象限時，在其終邊任取一點 $P(x，y)$，此處 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，

令 r 表示 $\overline{OP}$ 的長度，我們規定：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$。

(2) 當廣義角 θ 的終邊落在 x 軸上或 y 軸上時，

設其終邊和以原點為圓心的單位圓相交於點 $P(x，y)$，則：



(i) 當 P 落在 x 軸上時，$y=0$，$x=\pm 1$，所以：

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0	x	0	無意義	$\frac{1}{x}$	無意義

(當 P 在 x 軸正向時，$x=1$，當 P 在 x 軸負向時，$x=-1$)

(ii) 當 P 落在 y 軸上時，$x=0$，$y=\pm 1$，所以：

$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
y	0	無意義	0	無意義	$\frac{1}{y}$

(當 P 在 y 軸正向時，$y=1$，當 P 在 y 軸負向時，$y=-1$)

θ	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	無意義	0	無意義	0
$\cot\theta$	無意義	0	無意義	0	無意義
$\sec\theta$	1	無意義	-1	無意義	1
$\csc\theta$	無意義	1	無意義	-1	無意義

【例】求設 $\sin 150^\circ$、$\tan 150^\circ$與 $\cos 150^\circ$。

2.同界角有相同的三角函數值：

任意有向角ϕ均可以找到唯一的同界角θ，使得 $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

(1) $\sin(360^\circ n+\theta)=\sin\theta$；(2) $\cos(360^\circ n+\theta)=\cos\theta$；

(3) $\tan(360^\circ n+\theta)=\tan\theta$；(4) $\cot(360^\circ n+\theta)=\cot\theta$；

(5) $\sec(360^\circ n+\theta)=\sec\theta$；(6) $\csc(360^\circ n+\theta)=\csc\theta$。

3.三角函數在四個象限的正負關係：

	一	二	三	四
$\sin\theta$ ，$\csc\theta$	＋	＋	－	－
$\cos\theta$ ，$\sec\theta$	＋	－	－	＋
$\tan\theta$ ，$\cot\theta$	＋	－	＋	－

4.倒數關係，商數關係，平方關係對於任意廣義角均成立。