

T-3 和角公式、倍角公式、半角公式

和角公式

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$5. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ; \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} .$$

二倍角公式

$$1. \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta ;$$

$$2. \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 ;$$

$$3. \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} .$$

【例】設 α 為第一象限角， β 為第二象限角， $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ， $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ ，求 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\beta$ 。

【例】求 $\tan 75^\circ$ 及 $\tan 120^\circ$ 。

半角公式

$$1. \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} . \text{ (等號右端取正或取負，由 } \frac{\theta}{2} \text{ 所在的象限決定) ;}$$

$$2. \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} . \text{ (等號右端取正或取負，由 } \frac{\theta}{2} \text{ 所在的象限決定) ;}$$

$$3. \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} .$$

【例】設 $180^\circ < \beta < 270^\circ$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \frac{\beta}{2}$ 。

積化和差公式

$$1. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] ;$$

$$2. \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] ;$$

$$3. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] ;$$

$$4. \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] 。$$

和差化積公式

$$1. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ;$$

$$2. \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} ;$$

$$3. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ;$$

$$4. \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} 。$$