T-4 三角函數及其圖形

當θ是一個實數，在坐標平面上恰有一個θ弧度的有向角，此時終邊與單位圓的交點為（$\cos\theta$，$\sin\theta$），而其餘的四個三角函數仍可以用 $\sin\theta$，$\cos\theta$表示如下：

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ (\cos\theta\neq 0)，\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ (\sin\theta\neq 0)，$$

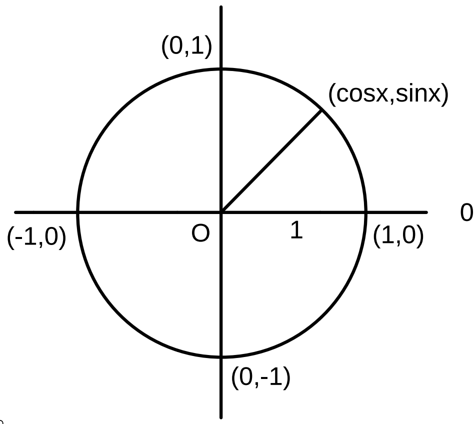
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\ (\cos\theta\neq 0)，\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}\ (\sin\theta\neq 0)。$$

因此，三角函數可以看成在實數上取值，也就是說，當x為實數時，$\sin x$、$\cos x$都有意義，而$\cos x\neq 0$時，$\tan x$、$\sec x$都有意義，$\sin x\neq 0$時，$\cot x$、$\csc x$也都有意義。因此，不但倒數關係，商數關係，平方關係，餘角關係均成立，往後我們確實把三角函數考慮成函數的形態時，我們的自變數均以弧度度量來表示。

主題一 正弦函數、餘弦函數、正切函數

1.正弦函數：

(1) 設 $y=f(x)=\sin x$，$x\in R$，



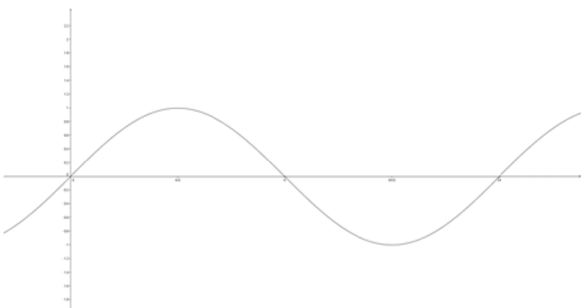
當x從 0 增加到$\frac{\pi}{2}$時，y（即$\sin x$）由 0 遞增到 1；

當x從$\frac{\pi}{2}$增加到π時，y（即$\sin x$）由 1 遞減到 0；

當x從π增加到$\frac{3\pi}{2}$時，y（即$\sin x$）由 0 遞減到－1；

當x從$\frac{3\pi}{2}$增加到 2π時，y（即$\sin x$）由－1 遞增到 0。

因此，函數 $y=\sin x$，$0\le x\le 2\pi$的圖形為：



(2) 正弦函數的週期：當 x 從 2π 增加到 4π 時，y（即 $\sin x$）的值重複 x 從 0 增加到 2π 時的變化，同理 x 從 4π 到 6π，6π 到 8π，⋯，甚至是 -2π 到 0，-4π 到 -2π，-6π 到 -4π，⋯，y 的值一再重覆變化。

(3) 週期函數：由 $\sin(x+2\pi)=\sin x$ 可說明變數 x 每隔 2π 單位，此函數就重複一段相同的圖形，我們稱函數 $y=\sin x$ 的週期是 2π。一般而言，一個函數 f，若自變數 x 每隔 p 單位，函數 f 就重複一段相同的圖形，即，存在正數 p 使得 $f(x+p)=f(x)$ 恒成立。則稱此函數為週期函數，且該正數 p 的最小值稱為函數 f 的週期。

【例】由 $\sin(x+2\pi)=\sin x$ 或 $\sin(x+4\pi)=\sin x$ 都可推知 $y=\sin x$ 為週期函數，我們說 $y=\sin x$ 的週期是 2π。

(4) 圖形特徵：

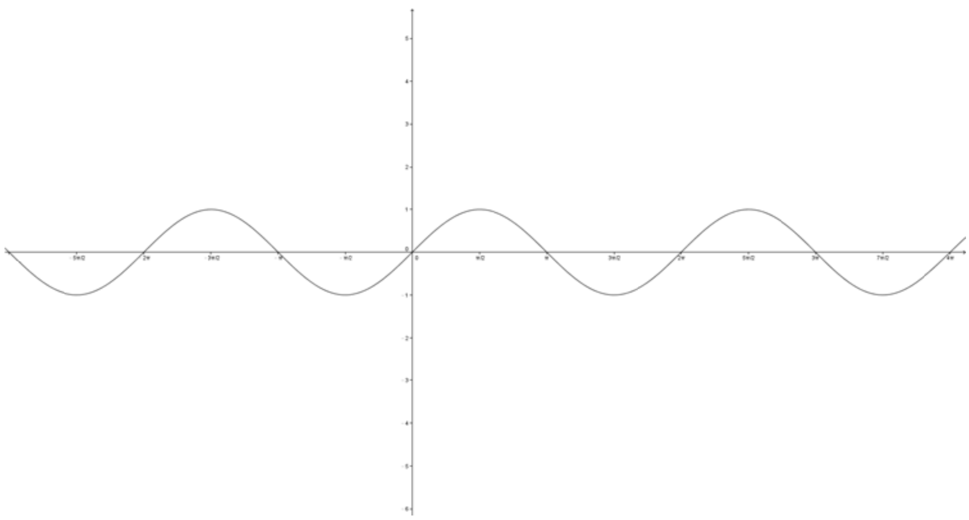
(i) 以原點(0，0)為對稱中心。

(ii) 與 x 軸的交點為($n\pi$，0)，其中 n 為整數。

(iii) 與 y 軸的交點為(0，0)。

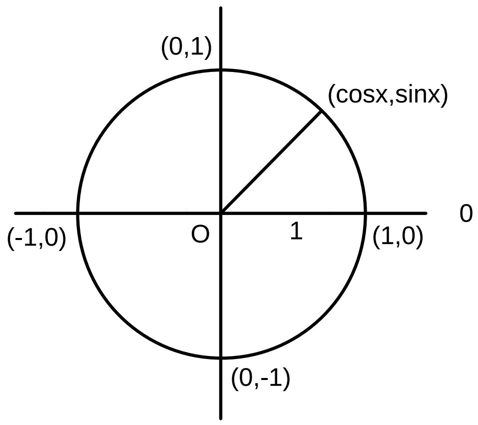
(iv) 最大值 1，最小值 −1，即 $-1 \le y \le 1$。

(v) 圖形是連續的。



2.餘弦函數：

(1) 設 $y=f(x)=\cos x$，$x\in R$，



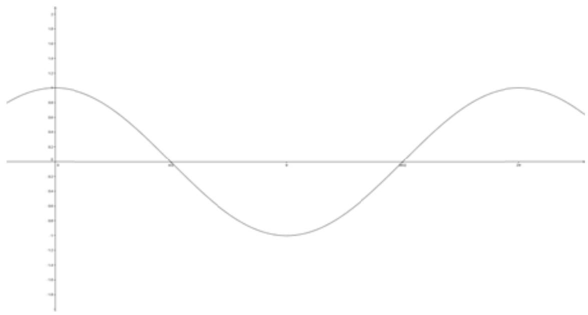
當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，y（即 $\cos x$）由 1 遞減到 0；

當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，y（即 $\cos x$）由 0 遞減到 -1；

當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，y（即 $\cos x$）由 -1 遞增到 0；

當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，y（即 $\cos x$）由 0 遞增到 1。

因此，函數 $y=\cos x$，$0\le x\le 2\pi$ 的圖形為：



(2) 餘弦函數的週期：因為 $\cos(x+2\pi)=\cos x$，因此函數 $y=\cos x$ 的週期為 2π。

(3) 餘弦函數可由正弦函數平移而得：

$$\cos x=\cos(-x)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

由此可知，$y=\cos x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位得到。

(4) 圖形特徵：

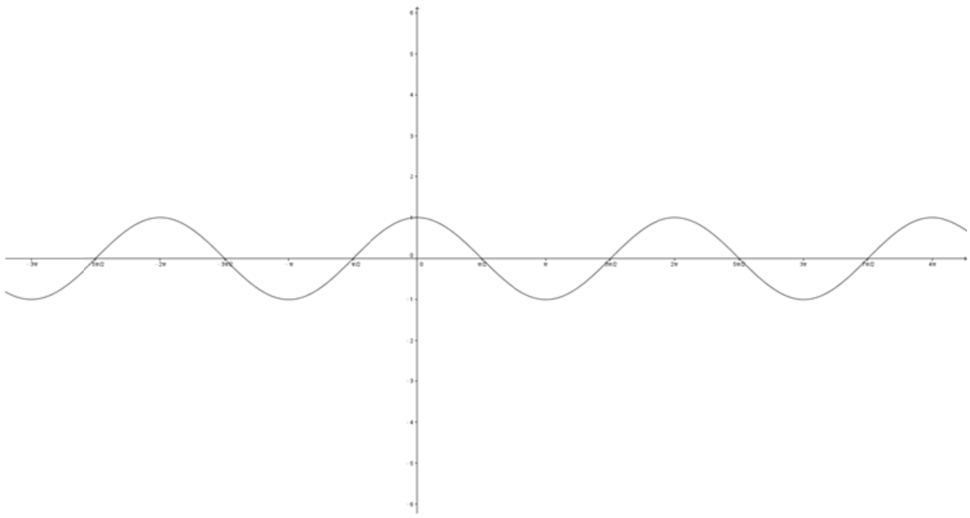
(i) 以直線 $x=0$（即 y 軸）為對稱軸。

(ii) 與 x 軸的交點為 $(n\pi+\frac{\pi}{2}, 0)$，其中 n 為整數。

(iii) 與 y 軸的交點為 $(0, 1)$。

(iv) 最大值 1，最小值 -1，即 $-1\le y\le 1$。

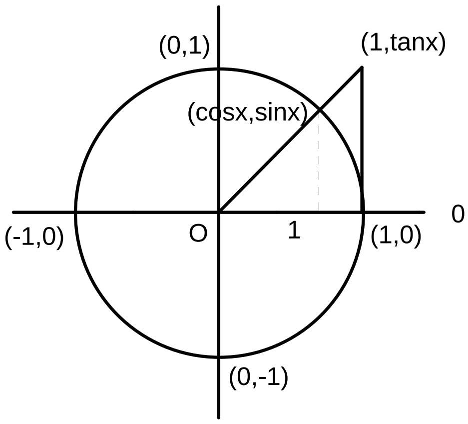
(v) 圖形是連續的。

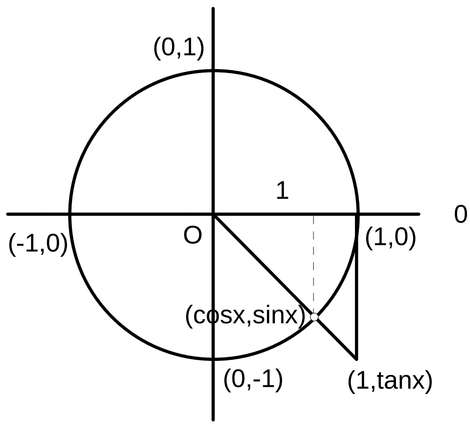


3.正切函數：

(1) 設 $y=f(x)=\tan x$ ，$x\in R$ ，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 n 為任意整數。

【說明】$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ，$\cos x$ 不能為 0，即，有向角 x 弧度的終邊與單位圓交點的 x 坐標不能為 0，因此，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 n 為任意整數。





當 x 從 0 開始遞增時，動點(1，$\tan x$)由點(1，0)往上爬升，即 $\tan x$ 遞增，

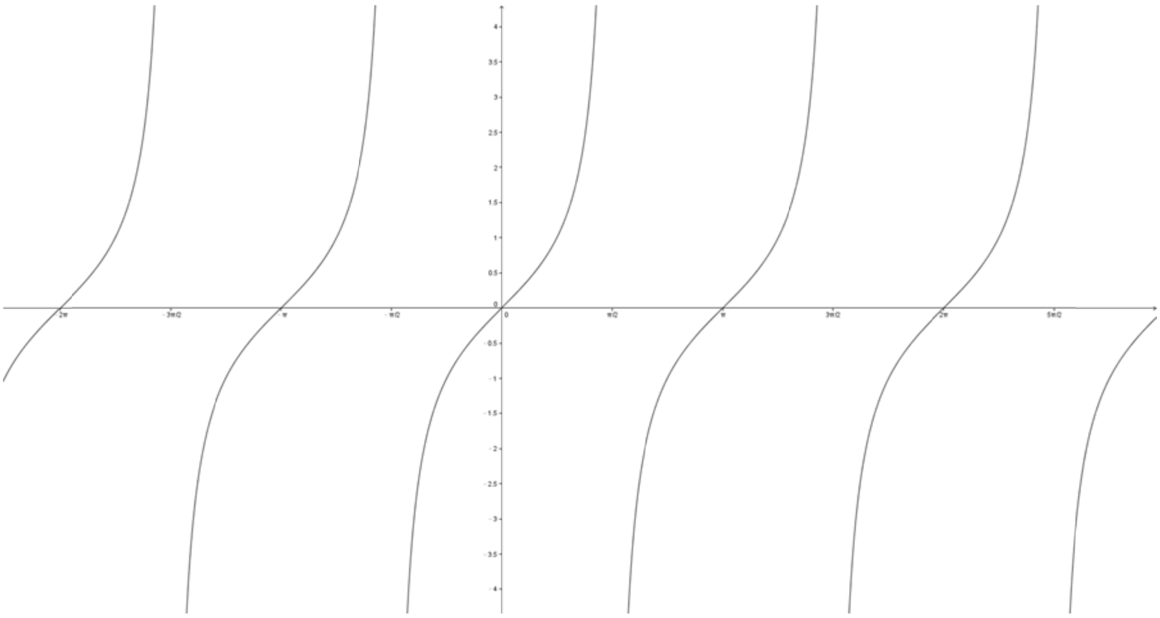
當 x 趨近 $\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\tan x$ 的值可無限制增大。

當 x 從 0 開始遞減時，動點(1，$\tan x$)由點(1，0)往下移動，即 $\tan x$ 遞減，

當 x 趨近 $-\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\tan x$ 的值可無限制減小。

由上所述，x 在 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之間變化時，$y=\tan x$ 的值隨著 x 值的增大而遞增，且 y 可為任意實數。

因此，函數 $y=\tan x$ ，$x\in R$ ，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$（其中 n 為任意整數）的圖形為：



其中，函數圖形的兩端可無限延伸。

(2) 正切函數的週期：因為 $\tan(x+\pi)=\tan x$ ，因此函數 $y=\tan x$ 的週期為 π 。

(3) 圖形特徵：

(i) 以原點(0，0)為對稱中心。

(ii) 與 x 軸的交點為($n\pi$ ，0)，其中 n 為整數。

(iii) 與 y 軸的交點為(0，0)。

(iv) $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 n 為整數。

(v) $y\in R$ 。

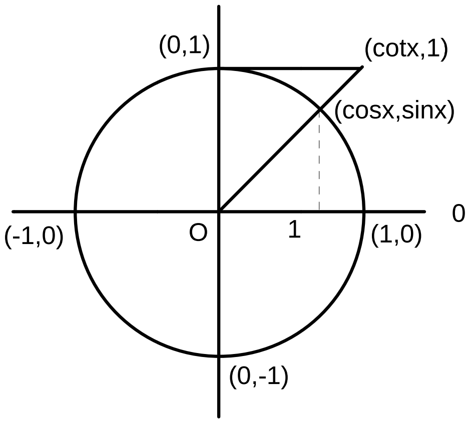
(vi) $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 為 $y=\tan x$ 圖形之漸近線，其中 n 為整數。

主題二 餘切函數、正割函數、餘割函數

1.餘切函數：

(1) 設 $y=f(x)=\cot x$ ，$x\in R$ ，$x\neq n\pi$ ，其中 n 為任意整數。

【說明】$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$，$\sin x$ 不能為 0，即，有向角 x 弧度的終邊與單位圓交點的 y 坐標不能為 0，因此，$x \neq n\pi$，其中 n 為任意整數。



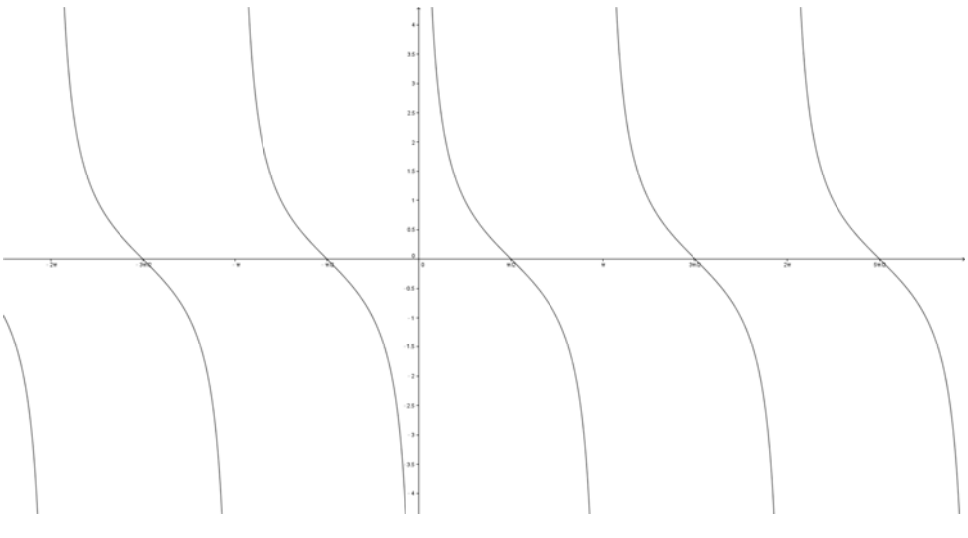
當 x 從 0 開始遞增時，動點($\cot x$，1)由無限大往下移動，即 $\cot x$ 遞減，

當 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 時，$\cot x$ 的值 $= 0$。

當 x 從 $\dfrac{\pi}{2}$ 開始遞增時，動點($\cot x$，1)由(0，1)往下移動，即 $\cot x$ 遞減，

當 x 趨近 π 時，$\cot x$ 的值可無限制減小。

由上所述，x 在 0 到 π 之間變化時，$y = \cot x$ 的值隨著 x 值的增大而遞減，且 y 可為任意實數，因此，函數 $y = \cot x$ 的圖形為：



其中，函數圖形的兩端可無限延伸。

(2) 餘切函數的週期：$\cot(x + \pi) = \cot x$，因此函數 $y = \cot x$ 的週期為 π。

(3) 圖形特徵：

(i) 以原點(0，0)為對稱中心。

(ii) 與 x 軸的交點為($n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，0)，其中 n 為整數。

(iii) 以直線 $x=n\pi$ 為漸近線，其中 n 為整數。

(iv) $x\neq n\pi$ ，其中 n 為整數。

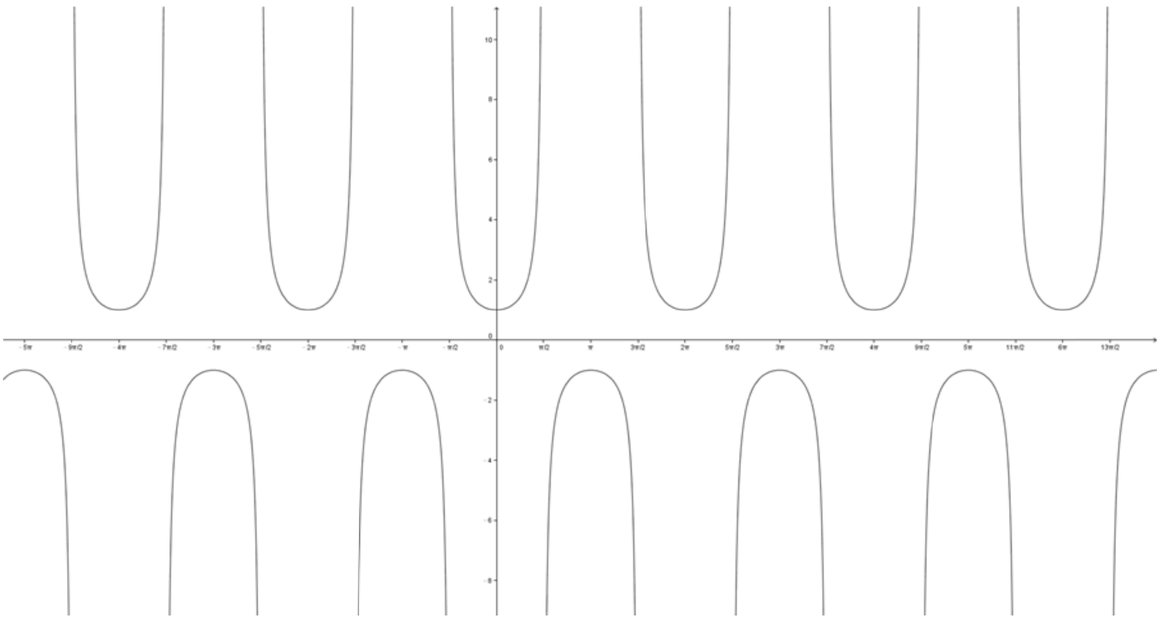
(v) $y\in R$ 。

2.正割函數：

(1) 設 $y=f(x)=\sec x$ ，$x\in R$ ，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 n 為任意整數。

【說明】$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ ，$\cos x$ 不能為 0，即，有向角 x 弧度的終邊與單位圓交點的 x 坐標不能為 0，因此，$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中為任意整數。

由於 $\sec x$ 是 $\cos x$ 的倒數，又 $0<\cos x\leq 1$ 時，$\sec x\geq 1$ ，而 $-1\leq\cos x<0$ 時，$\sec x\leq -1$ ，因此，由倒數關係可得函數 $y=\sec x$ 的圖形為：



其中，函數圖形的兩端可無限延伸。

(2) 正割函數的週期：$\sec(x+2\pi)=\sec x$ ，因此函數 $y=\sec x$ 的週期為 2π 。

(3) 圖形特徵：

(i) 以直線 $x=0$（即 y 軸）為對稱軸。

(ii) 與 y 軸的交點為(0，1)。

(iii) 以直線 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 為漸近線，其中 n 為整數。

(iv) $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 n 為整數。

(v) 在直線 y＝1 與 y＝－1 之間無圖形，即 $\sec x\geq 1$ 或 $\sec x\leq -1$。

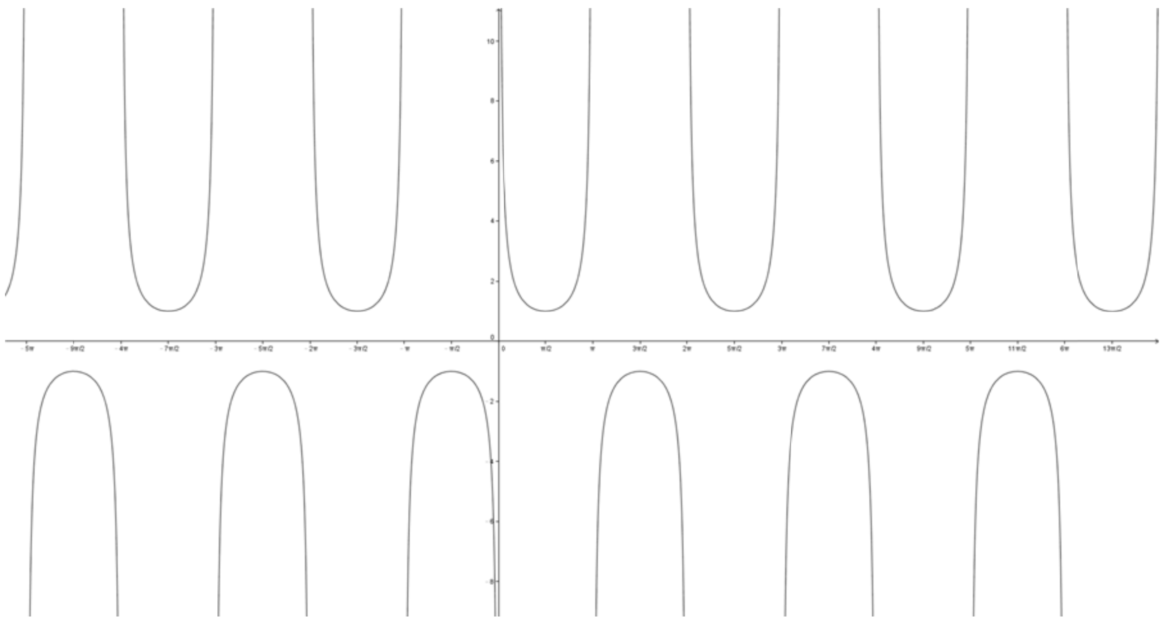
3.餘割函數：

(1)設 $y=f(x)=\csc x$，$x\in R$，$x\neq n\pi$，其中 n 為任意整數。

【說明】$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\sin x$ 不能為 0，即，有向角 x 弧度的終邊與單位圓交點的縱坐標不能為 0，因此，$x\neq n\pi$，其中 n 為任意整數。

由於 $\csc x$ 是 $\sin x$ 的倒數，又 $0<\sin x\leq 1$ 時，$\csc x\geq 1$，而 $-1\leq \sin x<0$ 時，$\csc x\leq -1$。

因此，由倒數關係可得函數 $y=\csc x$ 的圖形為：



其中，函數圖形的兩端可無限延伸。

(2) 餘割函數的週期：$\csc(x+2\pi)=\csc x$，因此函數 $y=\csc x$ 的週期為 2π。

(3) 圖形特徵：

(i) 以原點(0，0)為對稱中心。

(ii) 與 x 軸，y 軸均無交點。

(iii) 以直線 $x = n\pi$ 為漸近線，其中 n 為整數。

(iv) $x \neq n\pi$ ，其中 n 為整數。

(v) 在直線 $y = 1$ 與 $y = -1$ 之間無圖形，即 $\csc x \geq 1$ 或 $\csc x \leq -1$。

補充說明

1.以上討論的 6 個三角函數圖形，其中正弦，餘弦類似，正切，餘切類似，正割，餘割類似。

2.正弦，正切，正割在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間遞增；而餘弦，餘切，餘割在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間遞減。