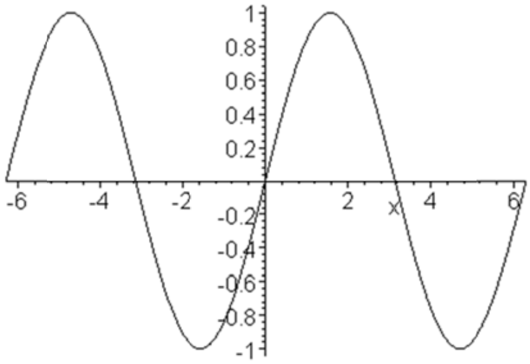
T-6 反三角函數

主題一 反正弦函數

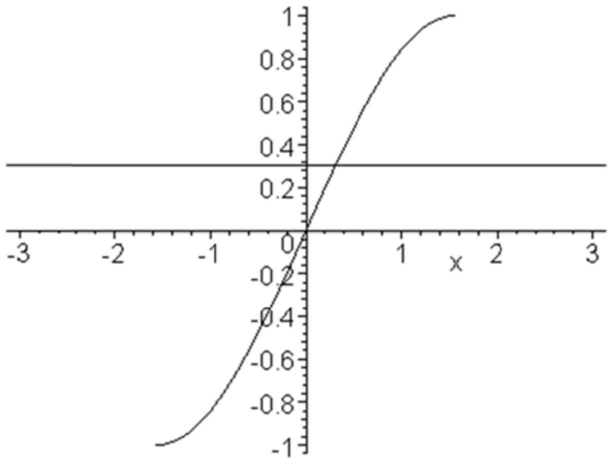
1.觀察正弦函數 $y = f(x) = \sin x$ 的圖形：



正弦函數 $y = \sin x$ 的值域為 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$，由上圖可以發現，當 x 在區間 $\{x \mid -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\}$ 上變動時，則每一個不同的 x 值，都會有一個不同的 y 值與其對應，並且 x 值由 $-\frac{\pi}{2}$ 逐漸增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，對應的 y 值會由－1 逐漸增加到 1，這種對應關係是 1 對 1 的。

2. $\sin^{-1} a$ 的定義：對於每一個實數 $a \in [-1,1]$，在區間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 內，都恰有一個實數 x，使得 $\sin x = a$，這個唯一的實數 x，就記做 $\sin^{-1} a$，讀作 $\arcsin a$。

3.對於每一個實數 a，$-1 \le a \le 1$，直線 $y = a$ 與正弦函數 $y = \sin x$ 在區間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 內的交點的橫坐標即為 $\sin^{-1} a$。



【例】 (1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$；(2) $\sin^{-1}(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{\pi}{6}$；(3) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$；

(4) $\sin^{-1}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=-\dfrac{\pi}{3}$；(5) $\sin^{-1}\dfrac{3}{2}$無意義。

4. $\sin^{-1}a$ 的性質：

(1) 當 $-1\le a\le 1$ 時，$\sin^{-1}a$ 才有意義。

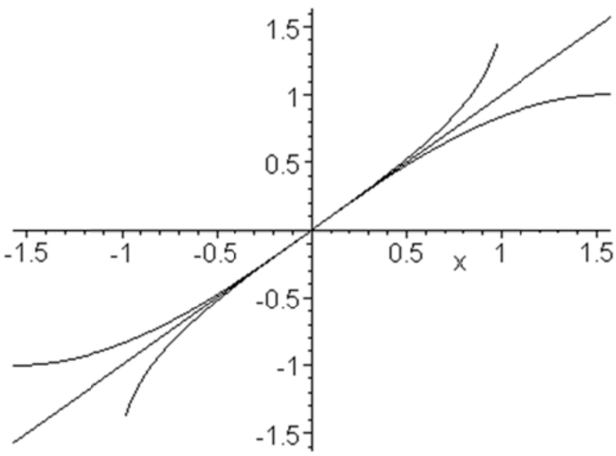
(2) 若 $\sin^{-1}a=x$，則 x 在區間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上且 $\sin x=a$，即 $\sin(\sin^{-1}a)=a$。

【例】 (1) $\sin(\sin^{-1}\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$；(2) $\sin(\sin^{-1}(-\dfrac{1}{2}))=-\dfrac{1}{2}$；(3) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{3}$；

(4) $\sin^{-1}(\sin(-\dfrac{\pi}{3}))=-\dfrac{\pi}{3}$。

5.反正弦函數：對於集合 $\{x\,|-1\le x\le 1\}$ 中的任一元素 x，在集合 $\{y\,|-\dfrac{\pi}{2}\le y\le \dfrac{\pi}{2}\}$ 中都恰好有一元素 y 滿足 $y=\sin^{-1}x$，這種 x 與 y 的對應關係為一函數，記為 $y=\sin^{-1}x$，其定義域為 $\{x\,|-1\le x\le 1\}$，值域為 $\{y\,|-\dfrac{\pi}{2}\le y\le \dfrac{\pi}{2}\}$。

6.反正弦函數與正弦函數的圖形對稱於直線 y＝x：

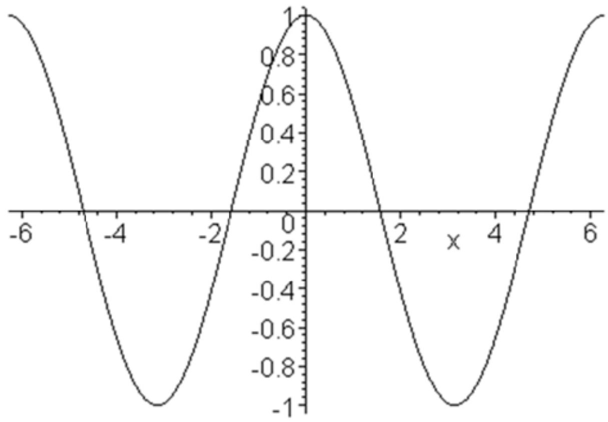


【例】求下列各式的值：(1) $\sin^{-1}(-1)$；(2) $\sin^{-1}\dfrac{\pi}{3}$；(3) $\sin(\sin^{-1}\dfrac{3}{4})$；(4) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{\pi}{6})$；

(5) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{3\pi}{4})$；(6) $\sin(\sin^{-1}\sqrt{2})$。 答：$-\dfrac{\pi}{2}$，無意義，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$，無意義

主題二 反餘弦函數

1.觀察餘弦函數 $y=f(x)=\cos x$ 的圖形：



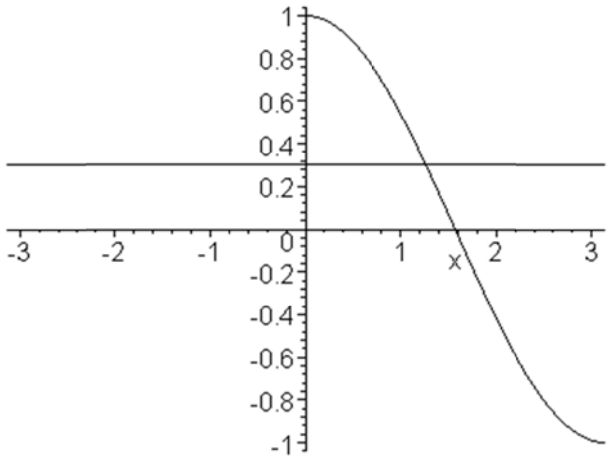
餘弦函數的值域為 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$，觀察區間 $\{x\,|\,0\le x\le\pi\}$ 上 $y=\cos x$ 的圖形，可以發現當 x 在區間 $\{x\,|\,0\le x\le\pi\}$ 上變動，則對每一個不同的 x 值，都會有一個不同的 y 值與其對應，並且當 x 由 0 逐漸增加到 π 時，y 值會由 1 逐漸減少到－1，而取得 $-1\le y\le 1$ 上的所有 y 值，這種對應關係是 1 對 1 的。

2. $\cos^{-1}a$ 的定義：對於每一個實數 a，$-1\le a\le 1$，在區間 $\{x\,|\,0\le x\le\pi\}$ 上都恰有一個實數 x 使得 $\cos x=a$，這個唯一的實數 x，記做 $\cos^{-1}a$，讀做 $\arccos a$。

3.對於任意實數 a，$-1\le a\le 1$，直線 $y=a$ 與 $y=\cos x$ 在區間 $\{x\,|\,0\le x\le\pi\}$ 上交點的橫坐標即為 $\cos^{-1}a$。

【例】(1) $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$；(2) $\cos^{-1}(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2\pi}{3}$；

(3) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$；(4) $\cos^{-1}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{5\pi}{6}$。



4. $\cos^{-1}a$ 的性質：

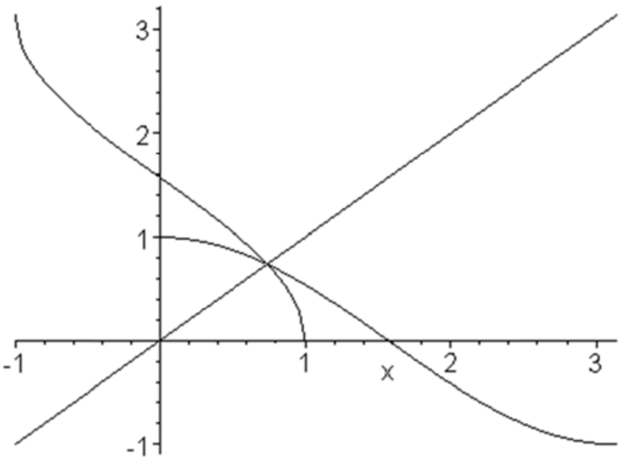
(1) 當 $-1 \le a \le 1$ 時，$\cos^{-1}a$ 才有意義。

(2) 若 $\cos^{-1}a = x$，則 x 在區間 $\left[0,\pi\right]$ 上且 $\cos x = a$，即 $\cos(\cos^{-1}a) = a$。

【例】$\cos(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$。

5.反餘弦函數：對於集合 $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$ 中的任一元素 x，在集合 $\{y \mid 0 \le y \le \pi\}$ 中都恰好有一元素 y 滿足 $y = \cos^{-1}x$，這種 x 與 y 的對應關係為一函數，記為 $y = \cos^{-1}x$，其定義域為 $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$，值域為 $\{y \mid 0 \le y \le \pi\}$。

6.反餘弦函數與餘弦函數的圖形對稱於直線 $y = x$：

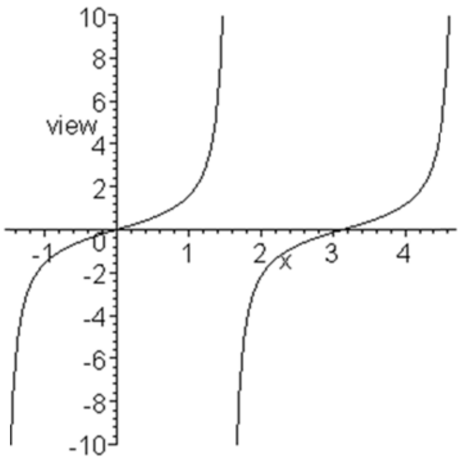


【例】(1) $\cos(\cos^{-1}(-\frac{2}{3}))=-\frac{2}{3}$；(2) $\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{5})=\frac{4\pi}{5}$。

【例】(1) $\sin^{-1}(\cos\frac{5\pi}{4})=-\frac{\pi}{4}$；(2) $\sin(\cos^{-1}\frac{2}{3})=-\frac{\sqrt{5}}{3}$。

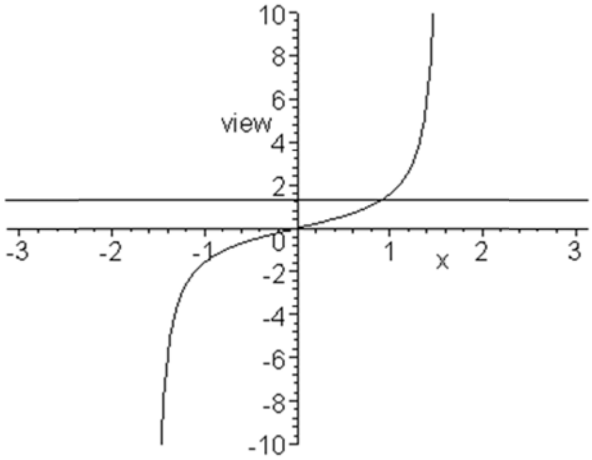
主題三 反正切函數

1.正切函數 $y=\tan x$ 的值域為 R，當 θ 由 0 遞減趨向 $-\frac{\pi}{2}$ 時，$\tan\theta$ 隨之由 0 遞減趨向 $-\infty$；而當 θ 由 0 遞增趨向 $\frac{\pi}{2}$ 時，$\tan\theta$ 隨之由 0 遞增趨向 $+\infty$。即：當 x 在區間 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上變動時，每一個不同的 x 值，都會有不同的 y 值與之對應，並且 y 取得一切實數值，而且這種對應關係是一對一的。



2. $\tan^{-1}a$ 的定義：對於每一個實數 a，在區間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上恰有一實數 x，使得 $\tan x=a$，這個唯一的實數 x，記作 $\tan^{-1}a$，讀作 $\arctan a$。

3.給定一實數 a，若直線 $y=a$ 與區間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上的正切函數 $y=\tan x$ 的圖形相交於 P 點，則 P 點的橫坐標即為 $\tan^{-1}a$。



【例】(1) $\tan^{-1}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$；(2) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$；

(3) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{6}$；(4) $\tan^{-1}(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-\dfrac{\pi}{6}$。

4. $\tan^{-1}a$的性質：

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<\tan^{-1}a<\dfrac{\pi}{2}$

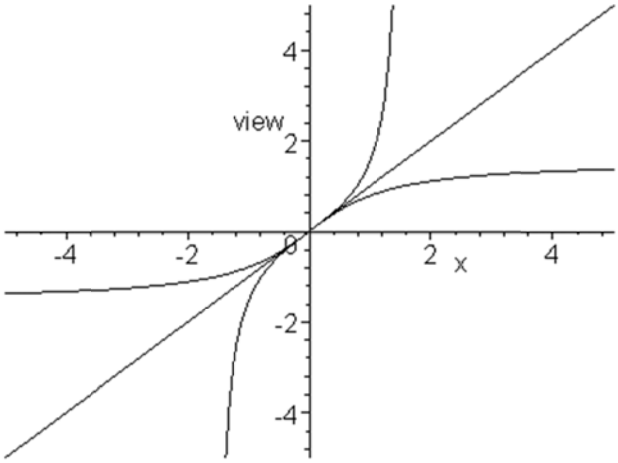
(2) 若$\tan^{-1}a=x$，則x在區間$(-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2})$上且$\tan x=a$，即$\tan(\tan^{-1}a)=a$。

【例】(1) $\tan(\tan^{-1}\sqrt{3})=\sqrt{3}$；(2) $\tan(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))=-\sqrt{3}$)；

(3) $\tan^{-1}(\tan\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{3}$；(4) $\tan^{-1}(\tan(-\dfrac{\pi}{3}))=-\dfrac{\pi}{3}$。

5.反正切函數：對於每一個實數x，集合$\{y\,|-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\}$中都恰有一元素$y=\tan^{-1}x$與此實數$x$對應，這種對應關係為一函數，記為$y=\tan^{-1}x$。它的定義域為$R$，值域為$\{y\,|-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\}$。

6.反正切函數與正切函數圖形對稱於直線 $y=x$：



【例】(1) $\tan^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$；(2) $\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{4})=-\frac{\pi}{4}$；(3) $\tan^{-1}(\tan\frac{2\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$。

【例】(1) $\tan(\tan^{-1}0)=0$；(2) $\tan(\tan^{-1}\frac{3\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$；(3) $\tan(\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=-\sqrt{3}$。