T-7 三角函數的極限與微分

主題一 三角函數的極限

首先我們考慮一個重要的三角函數的極限。

這裡我們不談數學上的證明，只談一個從電腦計算裡觀察的結果：

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.99833416	0.99998333	0.99999983	0.99999999

從表格裡電腦計算的結果來看，當 x 趨近於 0^+ 時（也就是 x 從比 0 大的方向逼近 0），$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值會趨近於 1，這個結果在 x 值取愈小的時候愈明顯，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

如果 x 從比 0 小的方向逼近 0，也就是令 x 趨近於 0^-，由 $\sin x$ 是奇函數可得 $\sin(-x)=-\sin x$，所以 $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，於是：

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

由此可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

上述的過程只是種觀察，然而事實上 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 也確實成立。要證明這件事情成立需要用到比較多的數學技巧，所以我們把證明留到微積分的正式課程裡再討論，這裡純粹只用觀察的方式得到這個結果，並利用它解決一些簡單的三角函數問題。

另外，因為 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 都是連續函數，所以考慮 x 趨近於 a 的極限就只需要直接計算就好了！即，$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$，$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$。

【例】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

【例】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x-\sin x}{x}=$________；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$________。

【例】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=$________；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=$________。

主題二 正弦函數的導函數

上一個主題裡，我們最後舉了一個例子計算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$的值，而且計算出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$，事實上我們可以進一步得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)}{x}=(-1)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$亦成立，這個極限可以幫我們計算出正弦函數的導函數。

【例】求 $f(x)=\sin x$ 之導函數。

【解法】我們從前學過 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，

欲求 $f(x)=\sin x$ 的導函數也是相同的做法。

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sinh-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\{\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sinh}{h}\}\\&=\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\\&=\cos x\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\sin x$ 之導函數為 $f'(x)=\cos x$。 □

【例】求 $f(x)=\cos x$ 之導函數。

【解法】我們從前學過 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ，

欲求 $f(x)=\cos x$ 的導函數也是相同的做法。

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\{\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\}\\
&=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&=-\sin x
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=\cos x$ 之導函數為 $f'(x)=-\sin x$ 。 □

當然，上面的兩個例子，我們除了用到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$ 與 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 之外，也用到了和角公式的概念： $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$ 、 $\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h$ 。