單元 11: 微分的基本規則
(課本 §3.1)

求函數 f 的導函數 f' 的過程爲計算量差商的極限, 即

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

但此過程經常是繁瑣的, 故需由此基本定義推導出一些方便於計算函數的導函數的規則, 並以符號

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{讀作 } d,\ dx \text{ of } f \text{ of } x$$

表示 f 對 x 在 x 的導函數 (the derivative of f with respect to x at x), 且稱此過程爲微分 (differentiation).

規則 1 (常數規則). 設 c 爲任一常數, 則

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

即常數的導函數爲 0.

例如,

$$\frac{d}{dx}(29) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(-\sqrt{2}) = 0$$

及

$$\frac{d}{dx}(\pi) = 0, \quad \frac{d}{dx}(e^5) = 0$$

規則 2. (冪次規則, power rule). 設 n 爲任一實數, 則

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

註. 僅根據二項公式

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 \\ &\qquad + \cdots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

證明 n 爲正整數的規則; 省略 n 爲其它實數的不易證明.

例如,

$$\frac{d}{dx}(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1$$

與

$$\frac{d}{dx}(x^{7/2}) = \frac{7}{2}x^{5/2}$$

以及

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

與

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1/3}) = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}}$$

註. 微分根式的原則是, 先將根式改寫成 x^n 的型式後, 再使用冪次規則.

規則 3 (常數積規則). 設 c 爲一常數且函數 f 可微, 則

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

即可將常數提出, 得常數積的導函數等於導函數的常數積.

例如,

$$\frac{d}{dx}(4x^8) = 4\frac{d}{dx}(x^8) = 4(8x^7) = 32x^7$$

以及

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = 5\frac{d}{dx}(x^{-2/3}) = -\frac{10}{3x^{5/3}}$$

規則 4 (加減法規則, 和差規則). 設函數 f 與 g 均可微, 則

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

即函數和差的導函數等於導函數的和差.

註 1. 和差規則可推廣至任意有限個函數的和或差, 如三個函數的和差規則

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x) \pm h(x)] \\ &\qquad = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)] \pm \frac{d}{dx}[h(x)] \end{aligned}$$

或四個函數, ..., 等.

註 2. 微分的常數積規則及和差規則合併稱爲微分的線性規則, 即

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)] \\ &\qquad = a_1 \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \cdots + a_n \frac{d}{dx}[f_n(x)] \end{aligned}$$

其中 $a_1, \ldots, a_n$ 爲任意常數且 $f_1, \ldots, f_n$ 爲可微函數, 也就是說, 線性組合的導函數等於導函數的線性組合, 或簡稱作可逐項微分.

註 3. 根據上述規則, 一個微分策略爲, 先將數學式中的各項改寫成 cx^n 的型式後, 再逐項微分.

例 1. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + \pi^2$

(b) $g(t) = \dfrac{t^2}{5} + \dfrac{5}{t^3} - \dfrac{2t^2}{\sqrt{t}} + \dfrac{e}{\sqrt{2e}}$

(c) $h(t) = t^2\left(\dfrac{5}{\sqrt{t}} + 3\sqrt{t} - 7\right)$

(d) $k(t) = \dfrac{2x^3 - 4\sqrt{x^3} + 5}{\sqrt{x}}$

例 2. 試求過函數

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

圖形上點 $\left(4, \frac{5}{2}\right)$ 的切線斜率及切線方程式.

例 3. 設一火箭在 t 秒的飛行高度爲

$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5 \text{ (呎)},\ t \geq 0$$

(a) 試求此火箭在任一 t 秒的速度 $v(t)$.

(b) 試求此火箭飛行的最高高度.