單元 20: 繪圖
(課本 §4.3)

函數的圖形是一由視覺的角度探討函數性質的有用輔助工具, 可提供函數所蘊含訊息的完整摘要. 繪製函數圖形除了需運用函數的遞增, 遞減性與相對極值及凹性與反曲點等性質外, 亦需藉助於下述探討的垂直漸近線與水平漸近線等性質.

一. 垂直漸近線 (vertical asymptotes)

設函數

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

計算二單邊極限

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=\infty$$

及

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

得知, 當 x 由右邊充分地靠近 1 時, 對應的函數值 $f(x)$ 會無界地遞增, 即函數的圖形會任意且無界遞增地接近鉛垂線 $x=1$, 如圖示. 同理, 當 x 由左邊充分地

靠近 1 時, 對應的函數值 $f(x)$ 會無界地遞減, 即函數的圖形會任意且無界遞減地接近鉛垂線 $x = 1$, 如圖示. 故稱 $x = 1$ 爲函數 f 的垂直漸近線. 對於一般的函數, 有如下的

定義. 鉛垂線 $x = a$ 爲函數 f 的垂直漸近線若且唯若

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ 或 } -\infty$$

或

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ 或 } -\infty$$

針對有理函數, 一個判斷函數圖形是否有垂直漸近線的簡單方法爲

有理函數的垂直漸近線判斷準則. 設有理函數

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 爲多項式函數, 則鉛垂線 $x = a$ 爲 f 的垂直漸近線若

$$Q(a) = 0 \text{ 但 } P(a) \neq 0$$

即 f 在分母爲 0 但分子不爲 0 的地方有垂直漸近線.

例 1. 試求函數

$$f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$$

的垂直漸近線.

<解> 因爲 f 爲 $P(x)=x^2$ 且 $Q(x)=4-x^2$ 的有理函數且由分母

$$4-x^2=0$$

得二個可能產生垂直漸近線的 $x=-2$ 與 $x=2$.

接著, 驗證. 代 $x=-2$, 得

$$P(-2)=4\neq 0$$

又代 $x=2$, 得

$$P(2)=4\neq 0$$

故根據有理函數的垂直漸近線判斷準則, f 有二垂直漸近線 $x=-2$ 與 $x=2$.

註. 鉛垂線 $x=a$ 爲有理函數 f 的垂直漸近線只需分母在 $x=a$ 爲零. 若分子與分母在 $x=a$ 均爲 0 時, 則 $x=a$ 不是一垂直漸近線, 如

$$f(x)=\frac{4(x^2-4)}{x-2},\ x\neq 2$$

得分子 $P(2) = 0$ 且分母 $Q(2) = 0$. 經由化簡, 得

$$f(x) = \frac{4(x+2)(x-2)}{x-2} = 4(x+2),\ x \neq 2$$

且

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 16 \neq \pm\infty$$

故由定義, $x = 2$ 不是一垂直漸近線. 如圖示, 除了 $x = 2$ 以外, f 的圖形就是直線 $y = 4x + 8$.

又如函數

$$g(x) = \frac{x^3 - x}{x(x+1)}$$

的分母在 $x = -1$ 與 $x = 0$ 爲 0, 但分子亦爲 0, 故 $x = -1$ 與 $x = 0$ 均不是垂直漸近線. 事實上, 經由化簡,

$$g(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = x - 1,\ x \neq -1, 0$$

如圖示, g 的圖形就是除了 $x = -1$ 與 $x = 0$ 以外的直線 $y = x - 1$.

二. 水平漸近線 (horizontal asymptotes)

設函數

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

計算在無窮遠的極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

及

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

得知, 當 x 往右邊充分地靠近無窮遠時, 對應的函數值 $f(x)$ 會任意地接近 1, 即函數的圖形會任意地接近水平線 $y = 1$, 如圖示. 同理, 當 x 往左邊充分地靠近負無窮遠時, 對應的函數值 $f(x)$ 會任意地接近 1, 即函數的圖形會任意地接近水平線 $y = 1$, 如圖示. 故稱水平線 $y = 1$ 爲水平漸近線. 對於一般的函數, 有如下的

定義. 水平線 $y = b$ 爲函數 f 的水平漸近線若且唯若

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

例 2. 試求函數

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

的水平漸近線.

<解> 計算在正無窮遠的極限, 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}=\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

計算在負無窮遠的極限, 得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}=\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

故, 由定義, f 僅有一條水平漸近線 $y=-1$, 如圖示.

例 3. 試求函數

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

的水平漸近線.

<解> 根據

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

計算在無窮遠的極限, 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

以及

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

故, 由定義, g 有二水平漸近線 $y=1$ 與 $y=-1$, 如圖示.

註. 設 $P(x)$ 爲次數大於或等於 1 的多項式函數. 經由改寫,

$$P(x)=\frac{P(x)}{1}$$

乃一分母爲 1, 恆不爲 0 的有理函數, 故 P 無垂直漸近線. 又

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\infty \text{ 或 } -\infty$$

或

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\infty \text{ 或 } -\infty$$

極限不存在, 故 P 無水平漸近線. 因此, 次數大於或等於 1 的多項式函數無垂直漸近線與水平漸近線.

三. 繪圖

主要根據漸近線以及一階與二階導函數所提供的訊息, 得

繪圖指引

1. 確定函數 f 的定義域.

2. 若可行, 求 f 的 x-截距與 y-截距.

3. 判斷當 $|x|$ 夠大時, f 的行爲.

4. 求 f 的水平與垂直漸近線.

5. 判斷 f 的遞增, 遞減性 (單調性).

6. 求 f 的相對極值.

7. 判斷 f 的凹性.

8. 求 f 的反曲點.

9. 描點及標示漸近線, 並根據單調性, 凹性與 f 在無窮遠及垂直漸近線附近的行爲, 依序由左至右在每個子區間上, 以平滑曲線繪出函數的圖形.

例 4. 試繪函數

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

的圖形.

<解> 1. 求定義域, 截距與漸近線. 因爲 f 是多項式函數, 故恆定義且無漸近線. 令 $x = 0$, 得 y-截距 2. 令 $y = 0$, 得 x 的一元三次方程式, 不易解, 故省略 x-截距的訊息. 又根據領導項,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 2) \\
&= \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \\
&= \infty(1) = \infty
\end{aligned}$$

即往右邊無界遞增, 且

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 2) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \\
&= -\infty(1) = -\infty
\end{aligned}$$

即往左邊無界遞減.

2. 求相對極值. 對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\
&= 3(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

恆連續, 故令 $f' = 0$, 得二臨界數 $x = 1$ 與 $x = 3$.

接著, 計算一階導函數 f' 在分割出的三個子區間上的符號, 得

$(-\infty, 1)$: $f' = (-)(-) = (+)$, f 遞增

$(1, 3)$: $f' = (+)(-) = (-)$, f 遞減

$(3, \infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, f 遞增

如圖示. 因此, f 在 $x = 1$ 有相對極大值

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$$

且在 $x = 3$ 有相對極小值

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$$

3. 求反曲點. 再對 x 微分並化簡, 得

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

恆連續, 故令 $f'' = 0$, 得唯一的反曲候選數 $x = 2$.

接著, 計算二階導函數 f'' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(-\infty, 2)$: $f'' = (-)$, f 下凹

$(2, \infty)$: $f'' = (+)$, f 上凹

如圖示. 因爲過 $x = 2$ 時, 凹性改變且

$$f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$$

故得反曲點 $(2, 4)$.

4. 描點與連結. 標示求得的相對極值與反曲點並將 f' 的符號置於 x-軸的上方, f'' 的符號置於 x-軸的下方, 且依序在每個子區間上根據 f 的遞增, 遞減性, 凹性以及 f 在正負無窮遠的行爲, 以平滑曲線連結標示的點而繪出函數 f 的圖形, 如圖示.

例 5. 試繪函數

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

的圖形.

<解> 1. 求定義域, 截距與漸近線. 因爲 f 爲有理函數且分母在 $x = 1$ 爲 0, 但分子不爲 0, 故得 f 的定義域

$$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

與垂直漸近線 $x = 1$, 以及在 $x = 1$ 附近的行爲

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

即 x 由右邊接近 1 時, f 無界遞增, 以及

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

即 x 由左邊接近 1 時, f 無界遞減.

又

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

得水平漸近線 $y = 1$.

因爲 $x > 1$ 時,

$$0 < x-1 < x+1$$

得

$$\frac{x+1}{x-1} > 1$$

即 f 圖形由上方任意地接近 $y = 1$. 同理, 因爲 $x < -1$ 時,

$$x-1 < x+1 < 0$$

得

$$0 < \frac{x+1}{x-1} < 1$$

且當 $-1 < x < 1$ 時,

$$x - 1 < 0 < x + 1$$

得

$$\frac{x+1}{x-1} < 0$$

即 f 的圖形由下方任意地接近 $y = 1$.

2. 求相對極值. 根據除法規則並化簡, 得

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

恆不爲 0 且 f' 在 $x = 1$ 不存在, 但 $x = 1$ 不在 f 的定義域內, 故無臨界數, 因而無相對極值.

接著, 以空心圓標示 $x = 1$ 且計算 f' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(-\infty, 1)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

$(1, \infty)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

如圖示.

3. 求反曲點. 根據連鎖規則並化簡, 得

$$f''(x) = (-2)(-2)(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

恆不爲 0 且在 $x = 1$ 不存在, 但 $x = 1$ 不在 f 的定義域內, 故無反曲候選數, 因爲無反曲點.

接著, 以空心圓標示 $x = 1$ 並計算 f'' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(-\infty, 1)$: $f'' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, f'' 下凹

$(1, \infty)$: $f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f'' 上凹

如圖示, 即使過 $x = 1$, 凹性改變, 但 f 在 $x = 1$ 未定義, 故無反曲點.

4. 描點與連結. 合併上述步驟所得的訊息, 如標示截距, 漸近線並將 f' 的符號置於 x-軸的上方, f'' 的符號置於 x-軸的下方, 且依序在每個子區間上, 根據 f 的單調性, 凹性以及 f 在漸近線附近的行爲, 以平滑曲線繪出函數的圖形, 如圖示.

例 6 試繪函數

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8$$

的圖形.

例 7. 試繪函數

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

的圖形.

例 8 試繪函數

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

的圖形.

例 9. 試繪函數

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

的圖形.