單元 23: 指數函數
(課本 §5.1)

指數函數 (exponential function) 在眞實世界的應用及數學分析上均扮演相當重要的角色, 諸如, 在理想狀態下, 培養皿中不同時間的細菌數量可由指數函數描述; 放射性物質乃根據指數退化率隨著時間衰退; 複利的定存結餘會呈現指數地成長; 在統計中可由指數函數表現某些重要的分布等. 有如下明確的

定義. 設 $b > 0$ 且 $b \neq 1$. 函數

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} b^x,\ -\infty < x < \infty$$

稱作以 b 爲底數 (base) 且 x 爲指數 (exponent) 的指數函數.

例如, 以 2 爲底數的指數函數

$$f(x) = 2^x,\ -\infty < x < \infty$$

且

$$f(3) = 2^3 = 8, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$$

與

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 2^0 = 1$$

以及

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2^{-2/3} = \frac{1}{2^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

有關指數的計算可藉助於關於指數相乘除, 指數的指數以及底數相乘除的

指數律 (laws of exponents). 設 a 與 b 為正數且 x 與 y 為實數. 則

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

2. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

3. $(b^x)^y = b^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

註. 指數律不是關於指數或底數相加減的等式, 要小心, 別誤用, 即

$$b^x \pm b^y \neq b^{x \pm y}$$

或

$$(a \pm b)^x \neq a^x \pm b^x$$

例 1. 試計算下列各式.

(a) $16^{7/4} \cdot 16^{-1/2}$

(b) $\dfrac{8^{5/3}}{8^{-1/3}}$

(c) $(64^{4/3})^{-1/2}$

(d) $(16 \cdot 81)^{-1/4}$

(e) $\left(\dfrac{3^{1/2}}{2^{1/3}}\right)^4$

(f) $3^{1/4}\cdot 9^{-5/8}$

(g) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-1/3}\cdot\left(\dfrac{81}{256}\right)^{-1/4}$

<解> (a) 相同底數的乘積, 指數相加並化簡, 得

$$\begin{aligned} 16^{7/4}\cdot 16^{-1/2} &= 16^{7/4-1/2}=16^{5/4} \\ &= (16^{1/4})^5=2^5=32 \end{aligned}$$

(b) 相同底數的分式, 指數相減, 得

$$\frac{8^{5/3}}{8^{-1/3}}=8^{5/3-(-1/3)}=8^2=64$$

(c) 指數的指數, 指數相乘並化簡, 得

$$\begin{aligned} (64^{4/3})^{-1/2} &= 64^{(4/3)(-1/2)}=64^{-2/3} \\ &= \frac{1}{64^{2/3}}=\frac{1}{(64^{1/3})^2} \\ &= \frac{1}{4^2}=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

(d) 不同底數的乘積, 不同底數的指數相乘並化簡, 得

$$\begin{aligned} (16\cdot 81)^{-1/4} &= 16^{-1/4}\cdot 81^{-1/4} \\ &= \frac{1}{16^{1/4}}\cdot\frac{1}{81^{1/4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

(e) 不同底數的分式, 不同底數的指數相除並化簡, 得

$$\left(\frac{3^{1/2}}{2^{1/3}}\right)^4 = \frac{3^{4/2}}{2^{4/3}} = \frac{9}{2^{4/3}}$$

(f) 化成同底數的乘積並根據指數律, 得

$$\begin{aligned} 3^{1/4} \cdot 9^{-5/8} &= 3^{1/4} \cdot (3^2)^{-5/8} \\ &= 3^{1/4} \cdot 3^{-5/4} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(g) 顛倒, 指數變號並根據不同底數的指數律化簡, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{27}\right)^{-1/3} \left(\frac{256}{81}\right)^{-1/4} &= \left(\frac{27}{8}\right)^{1/3} \left(\frac{81}{256}\right)^{1/4} \\ &= \frac{27^{1/3}}{8^{1/3}} \cdot \frac{81^{1/4}}{256^{1/4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

例 2. 試解下列各方程式.

(a) $2^{2x-1} = 16$

(b) $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$

(c) $3^{x-x^2} = \frac{1}{9^x}$

(d) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

<解> (a) 化成同底數 2 並比較指數, 得

$$2^{2x-1} = 2^4$$

即

$$2x - 1 = 4$$

故 $x = \frac{5}{2}$.

(b) 表成以 2 爲底數的數學式並化簡, 得

$$(2^3)^x = (2^{-5})^{x-2}$$

即

$$2^{3x} = 2^{10-5x}$$

故

$$3x = 10 - 5x$$

得

$$x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

(c) 化成同底數 3 並比較指數, 得

$$3^{x-x^2} = 3^{-2x}$$

故

$$x - x^2 = -2x$$

即

$$x^2 - 3x = x(x-3) = 0$$

得 $x = 0$ 與 $x = 3$.

(d) 改寫並分解, 得

$$\begin{aligned}(3^x)^2 - 12(3^x) + 27 &= (3^x - 3)(3^x - 9) \\ &= 0\end{aligned}$$

故

$$3^x = 3 \text{ 或 } 3^x = 9 = 3^2$$

得 $x = 1$ 與 $x = 2$.

經由描點 (以後再以一階與二階導函數所呈現的單調性與凹性以及極限行爲描繪), 得指數函數的圖形, 如圖示, 以及相關的

指數函數的性質.

指數函數

$$y = b^x,\ (b > 0,\, b \neq 1),\ -\infty < x < \infty$$

有如下的性質.

1. 定義域爲 $(-\infty, \infty)$.

2. 值域爲 $(0, \infty)$.

3. 過點 $(0, 1)$, 即 $b^0 = 1$.

4. 在 $(-\infty, \infty)$ 上連續, 即恆連續.

5. 若底數 $b > 1$, 在 $(-\infty, \infty)$ 上遞增, 即恆遞增; 若底數 $0 < b < 1$, 在 $(-\infty, \infty)$ 上遞減, 即恆遞減.

6. 若底數 $b > 1$, 則

$$\lim_{x\to\infty} b^x = \infty \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} b^x = 0$$

若底數 $0 < b < 1$, 則

$$\lim_{x\to\infty} b^x = 0 \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} b^x = \infty$$

無理數

$$e \approx 2.7182818\cdots$$

滿足下式

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

<證> 略, 但可以計算器確認, 如課本 p.333, 表 1.

以無理數 e 爲底數的指數函數

$$y = e^x$$

稱作自然指數函數 (natural exponential function), 在理論及應用上均扮演重要的角色, 如圖示.

相關的指數函數爲

$$y = e^{-x}$$

如圖示, 常用於指數衰退模型的建構.

例 3. 設函數

$$f(x) = Ae^{kx}$$

且已知

$$f(0) = 100 \text{ 且 } f(1) = 120$$

試求 $f(x)$.

<解> 代 $x = 0$, 得

$$100 = Ae^{k(0)} = A$$

再代 $x = 1$ 與 $A = 100$, 得

$$120 = 100e^{k}$$

即

$$e^{k} = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$$

因此, 根據指數律並代入, 得

$$f(x) = A(e^{k})^{x} = 100\left(\frac{6}{5}\right)^{x}$$

例 4. 設函數

$$f(t) = \frac{1000}{1 + Be^{-kt}}$$

且已知

$$f(0) = 20 \text{ 與 } f(2) = 30$$

試求 $f(5)$.

<解> 代 $t = 0$, 得

$$20 = \frac{1000}{1 + Be^{-k(0)}} = \frac{1000}{1 + B}$$

即

$$B+1=\frac{1000}{20}=50$$

得

$$B=50-1=49$$

再代 $t=2$ 與 $B=49$ 並根據指數律, 得

$$30=\frac{1000}{1+49e^{-k(2)}}=\frac{1000}{1+49(e^{-k})^2}$$

即

$$1+49(e^{-k})^2=\frac{1000}{30}=\frac{100}{3}$$

得

$$(e^{-k})^2=\frac{1}{49}\left(\frac{100}{3}-1\right)=\frac{1}{49}\cdot\frac{97}{3}=\frac{97}{147}$$

故

$$e^{-k}=\left(\frac{97}{149}\right)^{1/2}$$

最後, 根據指數律並代入, 得

$$f(t)=\frac{1000}{1+B(e^{-k})^t}=\frac{1000}{1+49\left(\frac{97}{147}\right)^{t/2}}$$

因此,

$$f(5) = \frac{1000}{1 + 49\left(\frac{97}{147}\right)^{5/2}} \approx 54.55139$$