# 單元 24: 對數函數
(課本 §5.2)

設 $b>0$ 且 $b\neq 1$. 指數方程式

$$b^y = x, x>0$$

的解 $y$ 乃是使得底數 $b$ 的冪次 (power) 爲 $x$ 時的冪次, 並以

$$\log_b x$$

表示, 即

$$y=\log_b x \text{ 若且唯若 } x=b^y,\ x>0$$

且稱作以 $b$ 爲底的 $x$ 的對數 (logarithm of $x$ to the base $b$). 例如, 根據對數的定義,

(a) $\log_{10} 100 = 2$ (因爲 $100 = 10^{2}$)

(b) $\log_5 125 = 3$ (因爲 $125 = 5^{3}$)

(c) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (因爲 $\frac{1}{27} = 3^{-3}$)

(d) $\log_{20} 20 = 1$ (因爲 $20 = 20^{1}$)

(e) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ (因爲 $16 = \frac{1}{2}^{-4}$)

(f) $\log_{\frac{1}{10}} 0.01 = 2$ (因爲 $0.01 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$)

註. 因爲以 $b$ 爲底數的指數

$$b^y = x > 0$$

恆爲正, 故僅考慮正數的對數

$$\log_b x, \;\; x > 0$$

例 1. 試求下列各方程式的解.

**(a)** $\log_3 x = 4$

**(b)** $\log_{16} 4 = x$

**(c)** $\log_x 8 = 3$

**(d)** $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$

<解> (a) 由對數的定義,

$$x = 3^4 = 81$$

(b) 由定義並化簡,

$$4 = 16^x = (4^2)^x = 4^{2x}$$

故 $x = \frac{1}{2}$.

(c) 由定義並化簡,

$$x^3 = 8 = 2^3$$

故 $x = 2$.

(d) 根據定義並化簡,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

故 $x = -2$.

二個廣泛使用的對數系統爲

**1.** 以 10 爲底數的對數, 稱作常用對數 (common logarithm) 並記成 log, 即

$$\log x = \log_{10} x, \ \ x > 0$$

**2.** 以無理數 $e$ 爲底數的對數, 稱作自然對數 (natural logarithm) 並記成 ln, 即

$$\ln x = \log_e x, x > 0$$

有關對數的計算, 常藉助於

對數律 (laws of logarithms). 設 $m$ 與 $n$ 爲正數且 $b > 0$, $b \neq 1$.

**1.** $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

**2.** $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

**3.** $\log_b m^n = n \log_b m$

**4.** $\log_b 1 = 0$

**5.** $\log_b b = 1$

註 1. 對數律是有關乘法, 除法與次方後取對數的等式, 不是加法, 減法後取對數的等式, 一定要小心, 別誤用, 也就是說,

$$\log_b(m+n) \neq \log_b m \cdot \log_b n$$

或

$$\log_b(m-n) \neq \frac{\log_b m}{\log_b n}$$

另需注意的是, 對數的乘積與分式不等於乘積與分式的對數, 即

$$\log_b m \cdot \log_b n \neq \log_b mn$$

或

$$\frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b \frac{m}{n}$$

註 2. 冪次的對數律可推廣至負的冪次, 即

$$\begin{aligned}\log_b m^{-n} &= \log_b \frac{1}{m^n} = \log_b 1 - \log_b m^n \\ &= 0 - n\log_b m = -n\log_b m\end{aligned}$$

因此, 對任意實數 $r$,

$$\log_b m^r = r\log_b m$$

例如,

(a) $\log(2\cdot 3) = \log 2 + \log 3$

(b) $\ln \frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3$

(c) $\log_3 \sqrt{7} = \frac{1}{2} \log_3 7$

(d) $\log_5 1 = 0$

(e) $\log_{45} 45 = 1$

(f) $\log_7 \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \log_7 5$

例 2. 給定

$$\log 2 \approx 0.3010$$

與

$$\log 3 \approx 0.4771$$

以及

$$\log 5 \approx 0.6990$$

試求下列各式的值.

**(a)** $\log(15)$

**(b)** $\log 7.5$

**(c)** $\log 81$

**(d)** $\log 50$

**(e)** $\log \dfrac{1}{300}$

<解> (a) 由 $15 = 3 \cdot 5$ 及對數律法, 得

$$\begin{aligned} \log 15 &= \log 3 + \log 5 \\ &\approx 0.4771 + 0.6990 \\ &= 1.1761 \end{aligned}$$

(b) 因爲

$$7.5 = \frac{15}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2}$$

故由對數律,

$$\begin{aligned} \log 7.5 &= \log 3 + \log 5 - \log 2 \\ &\approx 0.4771 + 0.6990 - 0.3010 \\ &= 0.8751 \end{aligned}$$

(c) 因爲 $81 = 3^4$, 故由對數律, 得

$$\log 81 = 4\log 3 \approx 4(0.4771) = 1.9084$$

(d) 由 $50 = 5 \cdot 10$ 與對數律, 得

$$\begin{aligned}\log 50 &= \log 5 + \log 10 \\ &\approx 0.6990 + 1 = 1.6990\end{aligned}$$

(e) 由 $300 = 3 \cdot 10^2$ 與對數律,

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{300} &= -\log 300 = -(\log 3 + 2\log 10) \\ &\approx -(0.4771 + 2) = -2.4771\end{aligned}$$

例 3. 試展開並化簡下列各式.

**(a)** $\log_3 x^2 y^3$

**(b)** $\log_2 \dfrac{x^2+1}{2^x}$

**(c)** $\ln \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}$

**(d)** $\ln \dfrac{x^2}{\sqrt{x}(1+x)^2}$

**(e)** $\ln xe^{-x^2}$

<解> (a) 由對數律, 得

$$\begin{aligned}\log_3 x^2y^3 &= \log_3 x^2 + \log_3 y^3\\ &= 2\log_3 x + 3\log_3 y\end{aligned}$$

(b) 由對數律, 得

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{x^2+1}{2^x} &= \log_2(x^2+1) - \log_2 2^x\\ &= \log_2(x^2+1) - x\end{aligned}$$

(c) 由對數律, 得

$$\ln \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x} = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x$$

(d) 根據對數律, 得

$$\ln \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+x)^2} = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln x - 2\ln(1+x)$$

(e) 根據對數律,

$$\ln xe^{-x^2} = \ln x + (-x^2)\ln e = \ln x - x^2$$

根據對數的定義, 得對數函數的

**定義.** 設 $b > 0$ 且 $b \neq 1$. 函數

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log_b x,\ x > 0$$

稱作以 $b$ 爲底數的對數函數 (logarithmic function with base $b$).

由對數的定義,

$$\log_b u = v \text{ 若且唯若 } b^v = u,\ u > 0$$

即, 點 $(u, v)$ 在對數函數

$$y = \log_b x$$

的圖形上若且唯若點 $(v, u)$ 在指數函數

$$y = b^x$$

的圖形上. 又點 $(u, v)$ 與點 $(v, u)$ 以直線 $y = x$ 互爲鏡射, 也就是說, 對數函數

$$y = \log_b x$$

的圖形與指數函數

$$y = b^x$$

的圖形以直線 $y = x$ 爲鏡射.

因此, 除了描點法外, 可根據鏡射法, 將指數函數的圖形對直線 $y = x$ 鏡射, 得對數函數的圖形, 如圖示.

根據圖示, 得

## 對數函數的性質.

對數函數

$$y = \log_b x,\ (b > 0,\ b \neq 1),\ x > 0$$

有如下的性質.

**1.** 定義域爲 $(0, \infty)$.

**2.** 值域爲 $(-\infty, \infty)$.

**3.** 過點 $(1, 0)$, 即 $\log_b 1 = 0$.

**4.** 在 $(0, \infty)$ 上連續, 即恆連續.

**5.** 若底數 $b>1$, 在 $(0,\infty)$ 上遞增, 即恆遞增; 若底數 $0<b<1$, 在 $(0,\infty)$ 上遞減, 即恆遞減.

**6.** 若底數 $b>1$, 則

$$\lim_{x\to 0^+}\log_b x=-\infty \text{ 且 } \lim_{x\to\infty}\log_b x=\infty$$

若底數 $0<b<1$, 則

$$\lim_{x\to 0^+}\log_b=\infty \text{ 且 } \lim_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$$

由對數的定義, 得

**指對互逆性.** 指數運算與對數運算互爲逆運算, 即

**1.** 一般底數 $b>0$ 且 $b\neq 1$,

$$b^{\log_b x}=x,\ x>0$$

且

$$\log_b b^x=x,\ -\infty<x<\infty$$

**2.** 自然指數函數與自然對數函數,

$$e^{\ln x}=x,\ x>0$$

且

$$\ln e^x = x,\ -\infty < x < \infty$$

**註.** 令

$$f(x) = b^x,\ -\infty < x < \infty$$

且

$$g(x) = \log_b x,\ x > 0$$

則根據合成函數的運算規則與指對互逆性,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f[\log_b x] \\ &= b^{\log_b x} = x,\ x > 0\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g[b^x] \\ &= \log_b b^x = x, -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

即

$$f[g(x)] = x,\ x \in\ g \text{ 的定義域}$$

且

$$g[f(x)] = x,\ x \in\ f \text{ 的定義域}$$

並稱 $f$ 與 $g$ 互為反函數 (inverse function), 如圖示. 也就是說, 指數函數與對數函數互為反函數, 運算是互逆的, 可彼此抵銷.

自然指數與對數的互逆性方便於解含指數與對數的方程式, 如

例 4. 試解下列各方程式.

**(a)** $2e^{x+2} - 7 = 5$

**(b)** $5 \ln x + 3 = 0$

**(c)** $3 \cdot 2^{-0.2t} - 4 = 6$

**(d)** $\dfrac{50}{1 + 40e^{0.2t}} = 40$

<解> (a) 移項整理, 得

$$e^{x+2} = \frac{7+5}{2} = 6$$

兩邊取 ln 並根據指對互逆性,

$$\ln e^{x+2} = x + 2 = \ln 6$$

即

$$x = \ln 6 - 2 \approx -0.21$$

(b) 移項整理, 得

$$\ln x = -\frac{3}{5}$$

兩邊取 $e$ 並根據指對互逆性,

$$e^{\ln x} = e^{-3/5}$$

即

$$x = e^{-3/5} \approx 0.55$$

(c) 移項整理, 得

$$2^{-0.2t} = \frac{10}{3}$$

兩邊取 ln 並化簡, 得

$$-0.2t \ln 2 = \ln \frac{10}{3}$$

故

$$t = -\frac{5\ln\frac{10}{3}}{\ln 2} = -\frac{5(\ln 10 - \ln 3)}{\ln 2} \approx -8.68$$

(d) 移項整理, 得

$$1 + 40e^{0.2t} = \frac{5}{4}$$

即

$$e^{0.2t} = \frac{1}{40}\left(\frac{5}{4} - 1\right) = \frac{1}{160}$$

兩邊取 ln 並化簡, 得

$$0.2t = -\ln 160$$

故

$$t = -5\ln 160 \approx -25.38$$

例 5. 設函數

$$f(x) = a + b\ln x$$

且已知

$$f(1) = 2 \text{ 與 } f(2) = 4$$

試求 $f$.

<解> 代 $x = 1$, 得

$$a + b \ln 1 = 2$$

即

$$a + b(0) = 2$$

故 $a = 2$. 再代 $x = 2$ 與 $a = 2$, 得

$$2 + b \ln 2 = 4$$

即

$$b = \frac{4-2}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$$

因此,

$$f(x) = 2 + \frac{2}{\ln 2} x$$