單元 25: 複利
(課本 §5.3)

複利是指數函數在商業世界的一種自然應用. 本單元探討與複利相關的各種主題. 設本金 (principal) 爲 P, 年利率爲 r (又稱作名目利率, nominal interest rate per year).

單利 (simple interest). 只針對本金計算利息稱作單利. 若一年計息 m 次且爲期 (期限, term) t 年, 則每次計算利息的利率爲

$$i = \frac{r}{m} \qquad \frac{\text{年利率}}{\text{一年計息次數}}$$

且 t 年共 mt 次計息, 得利息

$$\begin{aligned} I &= P\left(\frac{r}{m}\right) + \cdots + P\left(\frac{r}{m}\right) \quad (\text{共 } mt \text{ 次}) \\ &= P\left(\frac{r}{m}\right)(mt) = Prt \end{aligned}$$

故結餘 (又稱作累積結餘, accumulated amount)

$$A = P + I = P + Prt = P(1 + rt)$$

註. 計息的間隔時間稱作轉換期 (conversion period); 計息次數又稱作轉換期次數.

複利 (compound interest). 將利息加入一起計息稱作複利. 故第一次轉換期 (first period, 第一次計息) 後的結餘

$$A_1 = P + Pi = P(1+i)$$

第二期 (第二次計息) 後的結餘

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + A_1 i = A_1(1+i) \\ &= P(1+i)(1+i) \\ &= P(1+i)^2 \end{aligned}$$

第三期 (第三次計息) 後的結餘

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2(1+i) = P(1+i)^2(1+i) \\ &= P(1+i)^3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

類推, 得第 n 期 (第 n 次計息) 後的結餘

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1}(1+i) = P(1+i)^{n-1}(1+i) \\ &= P(1+i)^n \end{aligned}$$

因此, 爲期 (期限) t 年, 共 $n = mt$ 次計息, 後的結餘

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

例 1. 設本金 \$1000, 年利率 8% 且期限 3 年. 試求下列各項複利的結餘.

(a) 年複利 (compounded annually)

(b) 半年複利 (compounded semiannually)

(c) 季複利 (compounded quarterly)

(d) 月複利 (compounded monthly)

(e) 日複利 (compounded daily)

<解> (a) 因爲年複利表示一年計息一次, 故結餘

$$A = 1000(1 + 0.08)^3 \approx 1259.71$$

(b) 半年複利表示一年計息 2 次, 故結餘

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2(3)} \approx 1265.32$$

(c) 季複利為一年有 4 次轉換期數, 故結餘

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4(3)} \approx 1268.24$$

(d) 月複利的計息次數為 12, 得結餘

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12(3)} \approx 1270.24$$

(e) 日複利乃天天計息, 一年有 365 次, 得結餘

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365(3)} \approx 1271.22$$

註. 同樣的名目利率, 但因計息次數 (轉換期數) 不同而有不同的結餘, 且期數愈多, 結餘愈大, 與經驗相符. 也就是說, 實際獲得的利息因計算利息的頻率而定. 一個作為比較利率的基準為

有效利率 (effective rate, 又稱作真實利率, true rate). 與年利率 r, 一年計息 m 次, 為期一年的複利有相同的結餘的單利率稱作有效利率, 並記作 r_{eff}, 也就是說,

$$P(1+r_{\text{eff}}) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$$

同除 P, 得

$$1 + r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

故

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

註. 亦可由一年實際獲得的利息除以本金, 得眞實利率

$$r_{\text{eff}} = \frac{P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - P}{P} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

又根據有效利率的定義, 爲期 t 年的複利結餘可由有效利率 r_{eff} 計算, 得結餘

$$A = P(1 + r_{\text{eff}})^t$$

事實上, 代入 r_{eff} 並化簡, 得

$$\begin{aligned} P(1 + r_{\text{eff}})^t &= P\left[1 + \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right]^t \\ &= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \end{aligned}$$

就是以名目利率 r 計算後的複利結餘.

例 2. 試計算名目利率 8% 在 (a) 年複利, (b) 半年複利, (c) 季複利, (d) 月複利與 (e) 日複利下的有效利率.

<解> (a) 因爲年複利表示一年計息一次, 相當於單利, 故由定義,

$$r_{\text{eff}} = 0.08$$

或由公式,

$$r_{\text{eff}} = (1 + 0.08) - 1 = 0.08$$

(b) 半年複利的計息次數爲 2, 故

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 - 1 = 0.0816$$

(c) 季複利表示一年有 4 次轉換期, 故

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 \approx 0.08243$$

(d) 月複利一年有 12 次計息, 故

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0.08300$$

(e) 日複利的計息次數爲 365, 得

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365} - 1 \approx 0.08328$$

比較, 得計息頻率愈高, 實際利率愈大, 與經驗相符.

本金 P 是現在存入的資金, 故又稱作現值 (present value), 而結餘是 t 年後才獲得的, 故又稱作未來值 (future value).

一個投資者常需決定的問題是現在需投資多少資金以致於在未來某時可擁有某一數額的資金, 此乃相當於經由複利公式

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

將 P 表成 A, 得

複利的現值公式. 現值

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

例 3. 試問在年利率 6%, 月複利下, 需存入多少金額以致於 3 年後的結餘爲 \$20,000?

<解> 由公式, 存款金額

$$P = 20,000\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{-12(3)} \approx 16,713$$

例 4. 試求在年利率 10% 且季複利下, 5 年後存款結餘爲 \$49,158.60 的現值.

<解> 根據公式, 現值

$$P = 49,158.6\left(1+\frac{0.1}{4}\right)^{-4(5)} \approx 30,000$$

在一固定期限內, 計息愈頻繁, 會得愈多的結餘, 根據指數律, 極限的純量積性質及連續函數的極限性質, 當無限次計息, 即 $m \to \infty$ 時, 結餘

$$\begin{aligned} A &= \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \\ &= \lim_{m\to\infty} P\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} \\ &= P\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt} \qquad (1) \end{aligned}$$

接著, 令

$$u = \frac{m}{r}$$

得 $m \to \infty$ 時, $u \to \infty$, 且經由代入以及根據無理數 e 滿足的等式

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

由 (1) 式得

$$A = P\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^{rt} = Pe^{rt}$$

並稱此種利息為

連續複利 (continuous compound interest). 無界計息次數稱作連續複利. 本金 P, 年利率 r 且為期 t 年的連續複利的結餘

$$A = Pe^{rt}$$

且連續複利的現值

$$P = Ae^{-rt}$$

又由有效利率的定義,

$$P(1+r_{\text{eff}}) = Pe^{r}$$

得連續複利的有效利率

$$r_{\text{eff}} = e^{r} - 1$$

例 5. 設年利率 8% 且投資 \$1000. 試計算並比較 3 年後 (a) 日複利與 (b) 連續複利的結餘.

<解> (a) 日複利一年計息 365 次, 得結餘

$$A = 1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365(3)} \approx 1271.22$$

(b) 由公式, 連續複利的結餘

$$A = 1000e^{0.08(3)} \approx 1271.25$$

日複利的計息次數已相當多, 故與連續複利沒有太大差異, 然而在財務領域的理論分析上, 連續複利的公式是一相當重要的工具.

例 6. 由於經濟景氣, 設某公司不動產 t 年後的市值 (market value) 爲

$$V(t) = 300,000e^{\sqrt{t}/2}$$

且未來 10 年的預期增値率 (expected rate of appreciation) 爲 9% 的連續複利.

(a) 試求此不動產未來 10 市價的現值 P(t).

(b) 試計算並解釋 $P(7)$, $P(8)$ 與 $P(9)$.

<解> (a) 代入 $r = 0.09$ 及未來值 $V(t)$ 並根據指數律, 得對應的現值

$$\begin{aligned} P(t) &= V(t)e^{-0.09t} \\ &= 300,000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}, \ 0 \le t \le 10 \end{aligned}$$

(b) 代 $t = 7$, 8 與 9, 得

$$P(7) = 300,000e^{-0.09(7)+\sqrt{7}/2} \approx 599,837$$

與

$$P(8) = 300,000e^{-0.09(8)+\sqrt{8}/2} \approx 600,640$$

以及

$$P(9) = 300,000e^{-0.09(9)+\sqrt{9}/2} \approx 598,115$$

由計算結果得知, 此不動產市價的現值在一段成長期後開始下降, 此乃暗示存在一獲利最多的最佳出售時機, 事實上, 根據以後將學的指數函數的導函數, 此不動產在 7.72 年後的市價會有最高的現值 \$600,779. 也就是說, 於 7.72 年後出售, 獲利最多.

在解有關複利的問題時, 自然對數是一個相當有用的工具, 如

例 7. 在年利率為 12% 的季複利下, 由 \$10,000 增至 \$15,000, 需時多久?

<解> 根據複利公式, 此乃相當於解

$$15,000 = 10,000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(t)}$$

化簡整理, 得

$$(1.03)^{4t} = \frac{15,000}{10,000} = 1.5$$

兩邊取 ln 並根據對數律法化簡, 得

$$4t \ln 1.03 = \ln 1.5$$

即

$$t = \frac{\ln 1.5}{4 \ln 1.03} \approx 3.43$$

因此, 由 \$10,000 增至 \$15,000 約需 3.4 年.

例 8. 試問在月複利下, 利率為何時, 投資金額會由 \$10,000 增至 5 年後的 \$18,000?

<解> 根據複利公式, 此乃相當於解

$$18,000 = 10,000\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12(5)}$$

即

$$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{60}=\frac{18,000}{10,000}=1.8$$

兩邊取 ln, 得

$$60\ln\left(1+\frac{r}{12}\right)=\ln 1.8$$

即

$$\ln\left(1+\frac{r}{12}\right)=\frac{\ln 1.8}{60}$$

再取 e, 得

$$1+\frac{r}{12}=e^{(\ln 1.8)/60}$$

因此,

$$r=12(e^{(\ln 1.8)/60}-1)\approx 0.1181$$

意即, 年利率約爲 11.8% 時, 在月複利下, 5 年後資金會由 \$10,000 增至 \$18,000.

例 9. 年金 (annuity) 是一序列的定期給付. 設在每次投資轉換期結束時, 給付 R 元至轉換期利率爲 i 的帳

戶內, 則 n 次給付的年金未來值

$$
\begin{aligned}
S &= R(1+i)^{n-1} + \cdots + R(1+i) + R \\
&= R\left[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right] \\
&= R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}\right] = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]
\end{aligned}
$$

其中第三個等號成立乃根據等式

$$1 + x + \cdots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}$$

所致, 如圖示.

當轉換期利率 $i \to 0$, 即接近無息時, n 次給付的年金未來值

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{i\to 0} R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \\
&= R \lim_{i\to 0} \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
&= R\left(\frac{d}{dx}x^n\Big|_{x=1}\right) \\
&= R\left(nx^{n-1}\Big|_{x=1}\right) = nR
\end{aligned}
$$

其中第三個等號乃根據導函數的定義

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

以及取 $f(x) = x^n$, $a = 1$, $h = i$ 所致.

因此, 當利率相當小時, n 次給付的年金未來值相當於 n 次的無息給付.