單元 26: 指數函數的微分
(課本 §5.4)

欲分析含指數函數與對數函數的數學模型, 需發展出計算指數函數與對數函數的導函數的規則. 首先,

指數函數的微分規則. 自然指數的導函數為

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

<證> 令 $f(x) = e^x$. 根據導函數的定義, 指數律以及極限的性質,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \qquad (1) \end{aligned}$$

接著, 根據課本第 361 頁的表 4 (嚴格的證明超出本書範圍, 省略), 得

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

因此, 由 (1) 式, 得

$$\frac{d}{dx}(e^x) = f'(x) = e^x(1) = e^x$$

另, 根據連鎖規則, 可得可微函數與指數函數合成的微分規則, 即

指數函數的連鎖規則. 若 f 爲一可微函數, 則

$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)}f'(x)$$

<證> 設函數

$$g(x) = e^x$$

則合成函數

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g[f(x)] = e^{f(x)}$$

故由連鎖規則以及指數函數的微分規則, 即

$$g'(x) = e^x$$

得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) &= h'(x) = g'[f(x)]f'(x) \\ &= e^{f(x)}f'(x) \end{aligned}$$

註. 可微函數與指數函數合成的微分規則為, 函數本身乘以指數部分的導函數, 即

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) &= (\text{函數本身})(\text{指數部分的導函數}) \\ &= e^{f(x)}f'(x)\end{aligned}$$

也就是說, 與單純的指數函數的微分規則相同, 有一項為函數本身, 但根據連鎖規則, 必須乘以指數部分的導函數.

例 1. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = x^2e^x$

(b) $g(t) = (e^t + 2)^{3/2}$

(c) $h(x) = e^{2x^2+x}$

(d) $y = xe^{-2\sqrt{x}}$

(e) $k(t) = \dfrac{e^t}{e^t + e^{-t}}$

<解> (a) 根據乘法規則與指數函數的微分規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x \\ &= xe^x(x+2) \end{aligned}$$

(b) 根據連鎖規則以及指數函數的微分規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2}(e^t+2)^{1/2}(e^t+2)' \\ &= \frac{3}{2}e^t\sqrt{e^t+2} \end{aligned}$$

(c) 根據指數函數的連鎖規則,

$$h'(x) = e^{2x^2+x}(2x^2+x)' = (4x+1)e^{2x^2+x}$$

(d) 根據乘法規則與指數函數的連鎖規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-2\sqrt{x}} + xe^{-2\sqrt{x}}\left(-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= e^{-2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

(e) 根據除法規則與指數函數的連鎖規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{e^t(e^t+e^{-t}) - e^t(e^t+e^{-t}(-1))}{(e^t+e^{-t})^2} \\ &= \frac{e^{2t}+1-e^{2t}+1}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{2}{(e^t+e^{-t})^2} \end{aligned}$$

例 2. 設某隨著時間 t 演變的量 $Q(t)$ 呈現指數成長 (exponential growth), 即

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

試證此量在任意 t 時的成長率 (growth rate) $Q'(t)$ 與當時的量 $Q(t)$ 成正比.

<證> 根據指數函數的連鎖規則並化簡, 得

$$Q'(t) = Q_0 e^{kt}(kt)' = kQ_0 e^{kt} = kQ(t)$$

即 $Q'(t)$ 與 $Q(t)$ 成正比, 如所求.

例 3. 試求函數

$$f(x) = e^{-x^2}$$

的反曲點.

<解> 首先, 根據指數函數的連鎖規則, 得

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

再根據乘法規則與指數函數的連鎖規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(-2x) \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

恆連續. 因爲 e^{-x^2} 恆正, 故令 $f''(x)=0$, 得

$$2x^2-1=0$$

即二反曲候選數爲

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 與 \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

接著, 計算 f'' 在分割出的三個子區間上的符號, 得

$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f''=(+)(+)=(+)$, f 上凹

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f''=(+)(-)=(-)$, f 下凹

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$: $f''=(+)(+)=(+)$, f 上凹

如圖示. 因爲過 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 與 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時, 凹性均改變且

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-1/2}$$

故得二個反曲點

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-1/2}\right) \quad 與 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-1/2}\right)$$

例 4. 由單元 25, 例 6 知, 某公司不動產 t 年後市價的現值為

$$P(t) = 300,000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2},\ 0 \le t \le 10$$

試求此不動產市價的最佳現值.

<解> 首先, 根據指數函數的連鎖規則並化簡, 得

$$P'(t) = 300,000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}\left(\frac{1}{4\sqrt{t}} - 0.09\right)$$

恆連續且因 $e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}$ 恆正, 故令 $P'(t) = 0$, 得

$$\frac{1}{4\sqrt{t}} - 0.09 = 0$$

即唯一的臨界數為

$$t = \left(\frac{1}{4(0.09)}\right)^2 = \left(\frac{1}{0.36}\right)^2 = \frac{1}{12.96} \approx 7.72$$

接著, 計算 P' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$\left(0, \frac{1}{12.96}\right)$: $P' = (+)(+) = (+)$, P 遞增

$\left(\frac{1}{12.96}, 10\right)$: $P' = (+)(-) = (-)$, P 遞減

如圖示. 又 P 恆連續, 故根據一階導函數檢定法, 此不動產市價約在 7.72 年後有最佳現值

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{0.1296}\right) &= 300,000e^{\frac{-0.09}{0.1296}+\sqrt{\frac{1}{0.1296}}\Big/2} \\ &\approx 600,779 \end{aligned}$$

根據換底公式, 得

一般指數函數的微分規則.

一般指數函數的導函數爲

$$\frac{d}{dx}(b^x) = (\ln b)b^x, \; b > 0, b \neq 1$$

<證> 根據指對互逆性及對數律, 得換底公式

$$b^x = e^{\ln b^x} = e^{(\ln b)x}$$

接著, 根據指數函數的連鎖規則, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(b^x) &= e^{(\ln b)x}[(\ln b)x]' \\ &= (\ln b)e^{(\ln b)x} = (\ln b)b^x \end{aligned}$$

也就是說, 一般指數函數的導函數依然有指數函數本身, 但需多乘以底數的自然對數 $\ln b$.

同理, 根據連鎖規則, 得

一般指數函數的連鎖規則. 設 f 爲一可微函數, 則

$$\frac{d}{dx}\left(b^{f(x)}\right) = (\ln b)b^{f(x)}f'(x)$$

<證> 設函數

$$g(x) = b^x$$

則合成函數

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g[f(x)] = b^{f(x)}$$

故根據連鎖規則及一般指數函數的微分規則, 即

$$g'(x) = (\ln b)b^x$$

得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(b^{f(x)}\right) &= h'(x) = g'[f(x)]f'(x) \\ &= (\ln b)b^{f(x)}f'(x)\end{aligned}$$

例 5. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = \dfrac{3^x}{x^2+1}$

(b) $g(x) = \dfrac{2}{1+5^{-x}}$

(c) $h(x) = x^2 2^{-1/x}$

<解> (a) 根據乘法規則與一般指數函數的微分規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln 3)3^x(x^2+1) - 3^x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3^x[(x^2+1)\ln 3 - 2x]}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(b) 改寫並根據連鎖規則及一般指數函數的連鎖規則, 得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left[2(1+5^{-x})^{-1}\right] \\ &= \frac{-2}{(1+5^{-x})^2}(1+5^{-x})' \\ &= \frac{-2(\ln 5)5^{-x}(-1)}{(1+5^{-x})^2} = \frac{(2\ln 5)5^{-x}}{(1+5^{-x})^2} \end{aligned}$$

(c) 根據乘法規則及一般指數函數的連鎖規則, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x)2^{-1/x} + x^2(\ln 2)2^{-1/x}\left(\frac{2}{x^2}\right) \\ &= (2x)2^{-1/x} + (2\ln 2)2^{-1/x} \\ &= 2(x+\ln 2)2^{-1/x} \end{aligned}$$