單元 8: 極限
(課本 §2.4)

一. 微積分簡介

根據發展史, 微積分源起於牛頓 (Isaac Newton, 1642-1727) 與萊布尼茲 (Gottfried Wilhelm Leibnize, 1646-1716) 探討下述二種問題:

1. 求一曲線上過一給定點的切線 (tangent line), 如圖示.

2. 求一曲線所圍出的平面區域的面積, 如圖示.

似乎切線問題與數學的實務應用無關, 但事實上, “求一量對應於 (相對於) 另一量的變化率 (rate of change)” 的問題數學地等價於 “求一曲線上過一給定點的切線” 的幾何問題. 就是此種等價關係的發現驅策 17 世紀微積分的發展並促使微積分成爲解決實務問題的一種不可或缺工具, 諸如

1. 求一物體的速度.

2. 求細菌族群相對於時間的變化率, 即成長率.

3. 求一公司的利潤相對於時間的改變率.

4. 求一旅行社的收益相對於廣告費用的變化率.

切線問題的探討導致微分計算 (differetial calculus) 的發展, 此乃建基於一函數的導函數 (derivative) 的概念. 另一方面, 面積問題的探討引發積分計算 (integral calculus) 的發展, 它乃是建基於一函數的反導函數 (antiderivative) 或積分 (integral) 的概念. 更重要的是, 導函數與積分是密切相關的, 即所謂的 "微積分基本定理" (將於 §6.4 學習), 此定理呈現出導函數與積分間彼此互爲逆運算的關係. 往下追溯, 一函數的導函數與積分均是以一更基本的概念-極限-所定義, 此乃本單元的主題.

二. 一實例

根據一磁浮原型列車 (prototype of a maglev, magnetic levitation train) 沿著一單軌 (monorail track) 的運行測試資料, 得此磁浮列車在 t 秒的位置函數 (position function) (單位: 呎, 英尺) 爲

$$s = f(t) = 4t^2,\ 0 \le t \le 30 \tag{1}$$

問. 如何求此磁浮列車在 $t = 2$ 秒的速度? 即剛好在 2 秒那瞬間, 車速表呈現的值.

答. 無法僅用 (1) 式表示的位置求得, 但可透過不同時間的位置而計算出一時間區間內的平均移動距離, 即在一時間區間內的平均速度, 如在時間區間 $[2,4]$ 內的

$$\begin{aligned}\text{平均速度} &= \frac{\text{位移}}{\text{經過時間}} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} \\ &= \frac{4(4^2)-4(2)^2}{2} = 24(\text{呎/秒})\end{aligned}$$

可近似 $t = 2$ 秒時的速度.

可改進嗎? 直觀上, 時間區間愈小, 近似愈好, 故取 $t > 2$, 在 $[2,t]$ 上的

$$\begin{aligned}\text{平均速度} &= \frac{f(t)-f(2)}{t-2} \\ &= \frac{4t^2-4(2)^2}{t-2} = \frac{4(t^2-4)}{t-2}\end{aligned}$$

取愈來愈靠近 2 的 t 值, 得一序列在 $[2, t]$ 區間上的對應平均速度:

t	2.5	2.1	2.01	2.001
平均速度	18	16.4	16.04	16.004
t	2.0001	$\cdots$	$\to 2^+$	
平均速度	16.0004	$\cdots$	$\to 16$	

呈現出平均速度隨著 t 愈接近 2, 而愈靠近 16. 故一合理的建議爲, 此磁浮列車在 $t = 2$ 秒的瞬間速度 (instantaneous velocity) 爲 16 呎/秒, 此乃極限的概念.

三. 極限的直觀定義

設函數

$$g(t) = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2}, \ t \neq 2$$

即磁浮列車的平均速度. 今取一序列小於 2, 但愈來愈靠近 2 的 t 值, 得對應的函數值 $g(t)$:

t	1.5	1.9	1.99	1.999
平均速度	14	15.6	15.96	15.996
t	1.9999	$\cdots$	$\to 2^-$	
平均速度	15.9996	$\cdots$	$\to 16$	

即無論 t 由 2 的右邊接近 2 (表成 $t \to 2^{+}$) 或由 2 的左邊接近 2 (表成 $t \to 2^{-}$), $g(t)$ 均愈來愈接近 16, 故將此一現象稱作 t 接近 2 時, $g(t)$ 的極限爲 16, 並表成

$$\lim_{t\to 2} g(t) = \lim_{t\to 2} \frac{4(t^2-4)}{t-2} = 16$$

註 1. 上述極限概念的特徵乃是, 自變數 (t) 由兩邊任意地接近一固定數 (2) 時, 對應的函數値 ($g(t)$) 均一致地靠近一實數 (16).

註 2. 化簡, 得

$$g(t) = \frac{4(t+2)(t-2)}{t-2} = 4(t+2),\ t \neq 2$$

其圖形乃一在 $t = 2$ 未定義的直線, 以一空心圓表示未定義的點. 如圖示, 亦呈現出相同的極限現象.

註 3. 在 $t = 2$ 的函數値無論存在與否, 或爲何値, 均不影響 t 接近 2 時的極限 (簡稱在 $t = 2$ 的極限値), 如圖示, 函數

$$g(t) = 4(t+2),\ t \neq 2$$

與分段函數

$$f(t) = \begin{cases} 4(t+2), & t \neq 2 \\ 10, & t = 2 \end{cases}$$

以及分段函數

$$h(t) = \begin{cases} 4(t+2), & t \neq 2 \\ 18, & t = 2 \end{cases}$$

在 $t = 2$ 的行爲均不同, 但卻有相同的極限, 即

$$\lim_{t\to 2} g(t) = \lim_{t\to 2} f(t) = \lim_{t\to 2} h(t) = 16$$

此乃因爲極限值是探討在 $t = 2$ 附近的函數值的行爲變化, 故函數在 $t = 2$ 的行爲, 在求極限時, 不具任何決定性, 也就是說, 不需要考慮函數在 $t = 2$ 的值, 而這些函數在 $t = 2$ 附近的行爲均一樣, 故有相同的極限.

由上述例題及註解, 推廣出一般函數的非正式定義.

定義 1. 當 x 接近 a 時, 函數 f 的極限爲 L, 記作

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

若且爲若函數值 $f(x)$ 可任意地靠近 L, 當 x 充分地 (夠) 靠近 (但不等於) a 時.

例 1. 試求下列在 (或當自變數靠近) 給定點的極限.

(a) $f(x) = x^3$; $x = 2$

(b) $g(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$; $x = 1$

(c) $h(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$; $x = 0$

(d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 0$

<解> (a) 如圖示,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

(b) 如圖示,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3$$

(c) 如圖示, 當 $x \to 0^+$ 時,

$$h(x) = 1$$

任意地靠近 1; 但當 $x \to 0^-$ 時,

$$h(x) = -1$$

任意地靠近 -1, 另一不同的數; 也就是說, 無法得出一共同的實數使得函數值 $h(x)$ 可任意地靠近, 當 x 由兩邊接近 0 時, 故

$$\lim_{x \to 0} h(x) \text{ 不存在}$$

(d) 如圖示, 當 x 由兩邊接近 0 時, $k(x)$ 均無界地遞增 (increasing without bound), 而無法任意地靠近一明確的實數, 故極限不存在且記成

$$\lim_{x \to 0} k(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

更明確地說明極限不存在的理由, 也就是說, 由於函數值無界地遞增而不存在.

註 4. (a) 小題,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8 = f(2)$$

即在 $x = 2$ 的極限值等於函數值, 但 (b) 小題,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \neq 1 = g(1)$$

即在 $x = 1$ 的極限值不等於函數值; 此乃再度說明極限是探討在給定點附近函數值的變化情形, 與在給定點的函數值無關.

(c) 小題說明, 極限要求在給定點附近兩邊的函數值行為變化需一致, 即函數值需任意地接近一共同的實數.

(d) 小題說明, 雖然在給定點附近兩邊的函數值均一致地無界遞增, 但卻無法一致地接近一共同的實數, 因而極限不存在.

四. 函數極限的計算

除了上述以圖形的方式計算函數的極限外, 亦可根據下述極限的性質代數方式計算函數的極限.

定理 1 (極限的性質). 設 r 與 c 為二個使得數學式有意義的實數, 且

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ 以及 } \lim_{x\to a} g(x) = M$$

則

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x \to a} x = a$

3. $\lim_{x \to a} [f(x)]^r = [\lim_{x \to a} f(x)]^r = L^r$

4. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$

5. 和差的極限等於極限的和差

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] \\ & \qquad = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M \end{aligned}$$

6. 乘積的極限等於極限的乘積

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to a} [f(x)g(x)] \\ & \qquad = [\lim_{x \to a} f(x)][\lim_{x \to a} g(x)] = LM \end{aligned}$$

7. 商的極限等於極限的商

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}, \ M \neq 0$$

例 2. 試求下列各項極限.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} x^3$

(b) $\lim\limits_{x\to 4} 5x^{3/2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} (5x^4 - 2)$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} 2x^3\sqrt{x^2+7}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+1}{x+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x^2+x+5}{x^4+1}\right)^{3/2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$

註 5. 定理 1 中的極限運算性質, 需要在各自函數的極限均存在的條件下才成立, 即需要先檢查各自函數的極限是否存在, 並在均存在的情況下, 才可使用, 如

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

以及

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

均不存在, 其中 0^+ 表示任意靠近 0 的正數, 作爲計算極限時的一種輔助, 但

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)\\
=\ &\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}1=1\\
\neq\ &\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}+\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\infty-\infty
\end{aligned}$$

一種未定式 (indeterminate form), 表示無法確定的量, 需要進一步處理.

或

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{2x^2}=\frac{1+0}{0^+}=\infty$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \neq\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{2x^2}&\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=\infty\cdot 0\end{aligned}$$

另一種未定式.

或

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{0+1}{0^+}=\infty$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{0+1}{0^+}=\infty$$

但

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{3x^2}}=\lim_{x\to 0}3=3\neq\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

又是一種未定式.

註 6. 綜合上述, 得一求極限的方法: 代入法, 即代入整理後, 若爲一實數, 則極限存在且此實數就是極限; 若爲

$$\frac{\text{正數}}{0^+} = \infty \quad \text{或} \quad \frac{\text{負數}}{0^-} = \infty$$

則極限無界遞增地不存在; 或爲

$$\frac{\text{正數}}{0^-} = -\infty \quad \text{或} \quad \frac{\text{負數}}{0^+} = -\infty$$

則極限無界遞減地 (decreasing without bound) 不存在.

五. 未定式

若分子與分母的極限均爲 0, 即代入後, 得 $\frac{0}{0}$, 如

$$\lim_{x\to 2} \frac{4(x^2-4)}{x-2} \overset{\text{代入 } 2}{=} \frac{4(4-4)}{2-2} = \frac{0}{0}$$

稱作未定式 (indeterminate form), 表示無法確定的量, 不能以 $\frac{0}{0}$ 作爲極限, 需要進一步處理. $\frac{0}{0}$ 表示分子與分母有公因式, 處理的方法爲找出並消去公因式, 再求極限, 如

例 3. 試求下列各項極限.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4(x^2-4)}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{z^3-8}{z-2}$

(c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

(d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h}$

例 4 試求下列各項極限.

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

(b) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

六. 在無窮遠的極限 (Limits at Infinity)

前述均探討 x 接近一有限數時, 函數 f 的極限, 亦可探討 x 無界遞增至 ∞ 或 x 無界遞減至 $-\infty$ 時, f 的極限. 如圖示, 均呈現出當 $t \to \infty$ 或 $x \to \infty$, $x \to -\infty$ 時, 函數值會愈來愈靠近一固定數 400 或 2.

定義 2. 當 x 無界遞增 (即 $x \to \infty$) 時, 函數 f 的極限為 L, 記作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

若且為若函數值 $f(x)$ 可任意地靠近 L, 當 x 夠 (充分地) 大時.

同理, 當 x 無界遞減 (即 $x \to -\infty$) 時, 函數 f 的極限為 M, 記作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

若且為若函數值 $f(x)$ 可任意地靠近 M, 當 x 夠 (充分地) 小時.

例 5. 令二函數

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

且

$$g(x) = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0$$

試求下列各項極限.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

註. 所有定理 1 中, 在有限數 a 的極限性質, 在無窮遠的極限亦成立, 再加上下述的定理 2, 均可用於在無窮遠的極限的求值.

定理 2. 對所有的 $n > 0$, 若 $\frac{1}{x^n}$ 有定義, 則

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

註. 求有理函數在無窮遠的極限的典型作法爲, 同除分母的最高次方項 x^n 後, 再根據極限的性質及定理 2 求值.

例 6. 試求下列各項極限.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{2x^3+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3+3x^2-1}{x^2-2x+2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3-3x^2}{10x^2-x+5}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-8x+5}{5x^4+6x^3-7}$

例 7 設製作 x 張桌子的總成本為

$$C(x)=100x+200{,}000 \ (\text{元})$$

則製作 x 張桌子的平均成本

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=100+\frac{200{,}000}{x} \ (\text{元/張})$$

試求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\overline{C}(x)$ 並解釋.

<解> 根據極限性質及定理 2,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\overline{C}(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(100+\frac{200,000}{x}\right)\\ &= 100+0=100\end{aligned}$$

表是當產量 (製作數量) 增加時, 每張桌子的固定成本

$$\frac{200,000}{x}$$

穩定地遞減至 0, 以致於每張桌子的平均成本會接近生產的單位成本 (unit cost of production) \$100.