單元 9: 單邊極限與連續性
(課本 §2.5)

一. 單邊極限

設函數

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

如圖示, 若 x 爲接近 0 的正數 (即 $x \to 0^+$), $f(x)$ 會愈來愈靠近 1; 若 x 爲接近 0 的負數 (即 $x \to 0^-$), $f(x)$ 會愈來愈靠近 -1, 即 f 在 $x=0$ 的兩邊行爲不一致, 故根據極限的定義,

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{不存在}$$

若僅考慮正的 x 值, 得知 $f(x)$ 可任意地靠近 1, 當 x 充分地由右邊接近 0 時, 故稱 x 由右邊接近 0 時, f 的右邊極限 (right-hand limit)爲 1, 並記成

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

同理, 僅考慮負的 x 值, 得知 $f(x)$ 可任意地靠近 -1, 當 x 充分地由左邊接近 0 時, 故稱 x 由左邊接近 0 時, f 的左邊極限 (left-hand limit) 爲 -1, 並記成

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

此種右邊極限或左邊極限統稱爲單邊極限 (one-sides limit); 爲區分起見並在未特別聲明下, 之前探討的一般極限又稱爲雙邊極限 (two-sided limit), 要求 x 由兩邊接近一固定數 a 時, 對應的函數值會一致地任意靠近一實數 L, 並記成

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

根據上述, 可推廣出一般函數的單邊極限定義.

定義 1. 當 x 由右邊接近 a 時, 函數 f 的極限爲 L, 記作

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

若且唯若函數值 $f(x)$ 可任意地靠近 L, 當 x 由右邊充分地靠近 (但不等於) a 時, 如圖示.

同理, 當 x 由左邊接近 a 時, 函數 f 的極限爲 M, 記作

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

若且唯若函數值 $f(x)$ 可任意地靠近 M, 當 x 由左邊充分地靠近 (但不等於) a 時, 如圖示.

單邊極限與雙邊極限的關係如下述定理.

定理 3. 設函數 f 對於所有在 a 附近的 x 均有定義 (在 a 有無定義無妨), 則

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

若且唯若

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

即 (雙邊) 極限存在若且唯若兩個單邊極限均存在且相等.

註. 由極限的定義, 定理 3 顯然成立. 單邊極限常用於求分段函數在分段點的 (雙邊) 極限, 如下例.

例 1. 令二函數

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

且

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

試求

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \to 0} g(x)$

二. 連續函數

直觀上, 一函數是連續的 (continuous), 若此函數的圖形沒有斷開的現象, 否則稱此函數在斷裂處爲不連續 (discontinuous), 如圖示.

幾種造成不連續的現象

1. f 在 $x = a$ 未定義, 有一缺口 (hole), 不連續.

2. f 在 $x = c$ 有定義 (即 $f(c)$ 爲一實數), 但 $\lim_{x \to c} f(x)$ 不存在, 形成一跳躍 (jump), 不連續.

3. 雖然 f 在 $x = b$ 有定義 (即 $f(b)$ 爲一實數) 且 $\lim_{x \to b} f(x)$ 也存在, 但
$$\lim_{x \to b} f(x) \neq f(b)$$
也形成一跳躍, 不連續.

4. 在 $x = d$, f 既未定義, $\lim_{x \to d} f(x)$ 也不存在, 形成一中斷 (break), 不連續.

註. 函數 f 在其餘點均連續, 特徵爲在每一點的函數值等於極限值; 基於排除上述觀察到的不連續現象, 得連續性的定義如下.

定義 2. 函數 f 在 $x = a$ 連續若下列三條件均成立.

1. $f(a)$ 有定義.

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ 存在.

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

註 1. 由解析的觀點, f 在 $x = a$ 連續意謂著 f 在 $x = a$ 的極限值等於函數值, 即

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

由幾何的觀點, 此乃意謂著 x 接近 a 時, $f(x)$ 會靠近 $f(a)$.

註 2. f 在一區間內連續若且唯若 f 在區間內的每一點均連續.

例 2. 試判斷下列各函數在何處連續.

(a) $f(x) = x + 2$

(b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

(d) $F(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(e) $G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$

(f) $H(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

三. 連續函數的性質

根據連續性的定義及極限的性質, 得連續函數的

一般性質. 設 c 與 n 爲使得數學式有意義的實數, 且函數 f 與 g 均在 $x = a$ 連續, 則

1. 常數函數 (constant function) $f(x) = c$ 恆連續 (在每一數均連續).
2. 恆等函數 (identity function) $f(x) = x$ 恆連續 (在整個數線上均連續).
3. $[f(x)]^n$ 在 $x = a$ 連續.
4. $f \pm g$ 在 $x = a$ 連續.
5. fg 在 $x = a$ 連續.

6. $\dfrac{f}{g}$ 在 $x = a$ 連續, 當 $g(a) \neq 0$ 時.

7. 多項式函數 $p(x)$ 恆連續.

8. 有理函數 $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ 在所有 $q(x) \neq 0$ 的 x 均連續.

例 3. 試判斷下列各函數在何處連續.

(a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 10$

(b) $g(x) = \dfrac{8x^{10} - 4x + 1}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

定理 4 (中間值定理, Interminate Value Theorem). 若函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續且 M

是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間的任一數, 則在 $[a, b]$ 內至少有一數 c 使得 $f(c) = M$, 如圖示.

註 1. 中間值定理僅是一存在性定理, 說明介於兩端點函數值 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間的任一數, 一定會是 $[a, b]$ 內至少一數的函數值, 至於有幾個數及哪些數則未說明.

註 2. 若 f 在 $[a, b]$ 內不連續, 則中間值定理不一定成立. 如圖示, 對於介於斷裂點內的數 M, 就不會是 f 在 $[a, b]$ 內某數的函數值.

定理 5 (勘根定理). 若 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續且 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有相異的正負號 (符號) (即一正一負), 則方程式 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 內至少有一根, 如圖示.

<證> 因爲 $f(a)$ 與 $f(b)$ 符號相異, 故 0 介於其間, 故由中間值定理, 至少有一 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$, 即至少有一 c 爲根, 得證.

註. 勘根定理的幾何意義爲, 若一連續函數的圖形由 x-軸之上至 x-軸之下 (或由 x-軸之下至 x-軸之上), 則一定會穿過 x-軸.

例 4. 設

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

試證明方程式 $f(x) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 內至少有一根.

例 5. 設

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

試以勘根定理求 $f(x) = 0$ 的根.

<解> 首先,

$$f(0) = -1 < 0$$

且

$$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$$

故在 $(0, 1)$ 內有一根, 如圖示.

接著, 二分 $(0, 1)$, 得中點

$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

且

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0$$

故在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 內有一根, 如圖示.

再二分 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 得中點

$$\frac{1/2+1}{2}=\frac{3}{4}$$

且

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}+\frac{3}{4}-1=\frac{11}{64}>0$$

故在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 內有一根, 如圖示.

再二分 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, 得中點

$$\frac{1/2+3/4}{2}=\frac{5}{8}$$

且

$$f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{125}{512}+\frac{5}{8}-1=-\frac{67}{512}<0$$

故在 $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$ 內有一根, 如圖示.

$$\vdots$$

繼續二分至夠小的區間, 如

$$(0.6796875, 0.6835937)$$

並以此區間內的任一數作爲根的近似值 (稱作近似根), 通常取中點

$$\frac{0.6796875 + 0.6835937}{2} = 0.6816406$$

或取 0.68 作爲近似根, 則

$$\text{誤差} = |\text{近似根} - \text{眞正根}| < \text{區間長度}$$

因此, 最後二分得到的區間長度愈小, 誤差愈小, 估計愈準確, 如

$$\text{誤差} < 0.6835937 - 0.6796875 = 0.0039062$$

準確至 2 位小數.

註. 此種根據勘根定理求根的方法稱作二分法 (method of bisection).

例 6. 設函數

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

試求 k 使得 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上連續.