單元 12: 連鎖法則
(課本 §2.5)

一. 連鎖法則 (Chain Rule)

一種求合成函數的導函數的方法.

設

$$y = f(u)$$

為 u 的可微函數, 亦即,

$$\frac{dy}{du}$$

存在, 且

$$u = g(x)$$

為 x 的可微函數, 亦即,

$$\frac{du}{dx}$$

存在, 則

$$y = f(g(x))$$

是 x 的可微函數且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

或

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

註 1. 如圖示, 將 x 看成原料, $u = g(x)$ 看成半成品, 以及 $y = f(g(x))$ 看成成品, 則

成品對原料的變化率

= (成品對半成品的變化率) · (半成品對原料的變化率)

以數學式子表示, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

亦相當於

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

註 2. 將 $y = f(g(x))$ 中的 f 視爲外部函數, g 視爲內部函數, 則

$\dfrac{d}{dx}[f(g(x))]$

= (外部函數的導函數, <u>代入內部函數</u>, 半成品) ·

(內部函數的導函數)

也就是說,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

切不可代入內部函數的導函數, 如

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))g'(x)$$

註 3. 連鎖法則不同於加減法則, 絕對不可以將每個函數微分後再合成, 亦即, 不可以逐項微分再做對應的合成運算, 如

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))$$

註 4. 使用連鎖法則前, 需先辨識出合成函數的組成, 如

$$y = \frac{1}{x+1}$$

的形成過程爲

$$x \to u = x+1 \to y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{u}$$

故

$$u = x+1$$

且

$$y = \frac{1}{u} = u^{-1}$$

因此, 根據連鎖法則及冪次法則, 在逐項微分下,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (-u^{-2})(1) \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃是將半成品 u 以 $x+1$ 取代, 而表成原料 x 的式子, 因爲題意是求成品 y 對原料 x 的變化率, 故須表成原料 x 的式子. 又例如

$$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$$

的形成過程爲

$$\begin{aligned} & x \to u = 3x^2 - x + 1 \\ & \qquad\qquad \to y = \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{u} \end{aligned}$$

故

$$u = 3x^2 - x + 1$$

且

$$y = \sqrt{u} = u^{1/2}$$

因此, 根據連鎖法則及冪次法則, 在逐項微分下,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right)(6x-1)\\ &= \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}\end{aligned}$$

二. 廣義冪次法則 (General Power Rule)

設函數

$$y=[u(x)]^n$$

其中

$$u(x)$$

爲 x 的可微函數, 亦即,

$$\frac{du}{dx}=u'(x)$$

存在, 且 n 爲一實數, 則

$$\frac{dy}{dx}=n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

或

$$\frac{d}{dx}[u^n]=nu^{n-1}\cdot u'$$

<證> 因爲函數

$$y = [u(x)]^n$$

的形成過程爲

$$x \to u = u(x) \to y = [u(x)]^n = u^n$$

故

$$u = u(x)$$

且

$$y = u^n$$

因此, 根據連鎖法則及冪次法則, 亦即,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{連鎖法則}) \\
&= \frac{d}{du}[u^n] \cdot \frac{du}{dx} \\
&= nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{冪次法則}) \\
&= n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

註. 廣義冪次法則可針對函數的次方求導函數, 而不僅只是自變數的次方, 故是冪次法則的推廣, 而稱爲廣義冪次法則. 使用廣義冪次法則時, 除了對次方處理外, 一定要記得乘上因著連鎖法則而產生的 $u'(x)$, 亦即,

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $f(x) = (3x - 2x^3)^3$

(b) $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

(c) $y = \dfrac{1}{(1-x)^5}$

(d) $g(x) = \sqrt[4]{(2x-1)^3}$

(e) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-2x}}$

(f) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$

(g) $y = \left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$

<解> 解題技巧: 將各項先改寫成 $c[u(x)]^n$ 的型式後, 再根據廣義冪次法則求導函數.

(a) 因爲原式已是 $c[u(x)]^n$ 的型式, 故直接根據廣義冪次法則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(3x-2x^3)^2 \cdot (3x-2x^3)' \\ &= 3(3x-2x^3)^2(3-6x^2) \end{aligned}$$

(b) 首先, 可將 y 改寫成

$$y = 3(x^2+1)^{-1}$$

故根據廣義冪次法則,

$$\begin{aligned} y' &= 3(-1)(x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' \\ &= -3(x^2+1)^{-2}(2x) \\ &= \frac{-6x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(c) 經由改寫, 得

$$y = (1-x)^{-5}$$

故根據廣義冪次法則,

$$\begin{aligned} y' &= -5(1-x)^{-6} \cdot (1-x)' \\ &= -5(1-x)^{-6}(-1) \\ &= \frac{5}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

(d) 改寫後,

$$g(x) = (2x-1)^{3/4}$$

故根據廣義冪次法則,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{4}(2x-1)^{-1/4} \cdot (2x-1)' \\ &= \frac{3}{4}(2x-1)^{-1/4}(2) \\ &= \frac{3}{2}(2x-1)^{-1/4} \\ &= \frac{3}{2\sqrt[4]{2x-1}} \end{aligned}$$

(e) 因爲乘積法則較分式法則單純, 故可將 $h(x)$ 改寫成

$$h(x) = x^{1/2}(1-2x)^{-1/3}$$

因此, 根據乘積法則及廣義冪次法則,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(x^{1/2}\right)'(1-2x)^{-1/3}+ \\ &\qquad x^{1/2}\left[(1-2x)^{-1/3}\right]' \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2}(1-2x)^{-1/3}+ \\ &\qquad x^{1/2}\left(-\frac{1}{3}\right)(1-2x)^{-4/3}(-2) \end{aligned}$$

接著, 經由將各同類項的最小次方因式提出後的化簡, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{6}x^{-1/2}(1-2x)^{-4/3}[3(1-2x)+4x] \\ &= \frac{3-2x}{6x^{1/2}(1-2x)^{4/3}} \\ &\overset{\text{或}}{=} \frac{3-2x}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-2x)^4}} \end{aligned}$$

(f) 因爲原式可改寫成

$$y = x^2(1-x^2)^{1/2}$$

故根據乘積法則及廣義冪次法則,

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'(1-x^2)^{1/2}+x^2\left[(1-x^2)^{1/2}\right]' \\ &= 2x(1-x^2)^{1/2}+ \\ &\qquad x^2\left(\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \end{aligned}$$

最後, 將各同類項的最小次方提出並化簡, 得

$$\begin{aligned} y' &= x(1-x^2)^{-1/2}[2(1-x^2)-x^2] \\ &= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(g) 將小括號內的分式視爲一整體, 則根據廣義冪次法則及分式法則, 得

$$\begin{aligned} y' &= 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\cdot\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)' \\ &= 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} \\ &= 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\cdot\frac{-3x^2+2x+9}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

三. 微分法則摘要

(1) 常數法則:

$$\frac{d}{dx}[c]=0$$

(2) 純量乘積法則:

$$\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$$

(3) 加減法則:

$$\frac{d}{dx}[u \pm v] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

(4) 乘積法則:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u'v + uv'$$

(5) 分式法則:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(6) 冪次法則:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \quad \text{(簡單型)}$$

以及

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} \cdot u' \quad \text{(廣義型)}$$

(7) 連鎖法則:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$