

## 單元 27: 對數函數

### (課本 §4.4)

#### 一. 自然對數函數的定義

根據自然指數函數  $e^x$  圖形及水平線檢定法, 得  $e^x$  爲一對一函數, 故  $e^x$  有反函數, 並稱此反函數爲自然對數函數 (natural logarithm function), 且表示成

$$\ln x$$

亦即,

$$\ln x = b \Leftrightarrow e^b = x$$

如圖示.

#### 二. 自然對數函數的圖形

根據反函數圖形的性質, 由  $e^x$  的圖形, 經由對直線

$$y = x$$

的鏡射, 得自然對數  $\ln x$  的圖形, 如圖示, 以及

(1) 定義域爲  $(0, \infty)$ .

(2) 值域為  $(-\infty, \infty)$ , 且過點  $(1, 0)$ .

(3) 遞增, 下凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數  $e^x$ .

(6) 當  $x$  向右無界地延伸時,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \ln \infty = \infty$$

故, 無水平漸近線.

(7) 當  $x$  由右靠近 0 時,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

得  $x = 0$  為一垂直漸進線.

### 三. 性質

因為  $e^x$  與  $\ln x$  互為反函數, 故

(1) 對於  $-\infty < x < \infty$ ,

$$\ln e^x = x$$

(2) 對於  $x > 0$ ,

$$e^{\ln x} = x$$

以及如下的對數律

$$(1) \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$(2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$(3) \ln x^n = n \ln x$$

註. 只有在乘積, 分式, 以及次方後的對數才有對數律, 其它的情況均無, 如

$$\begin{aligned} \ln(x + y) &\neq \ln x + \ln y \\ &\neq \ln x \ln y \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\ln(x - y) &\neq \ln x - \ln y \\ &\neq \frac{\ln x}{\ln y}\end{aligned}$$

對數律在化簡上相當有用, 請特別注意, 記住正確的對數律, 誤犯上述的錯誤.

例 1. 試解下列各方程式.

(a)  $e^x = 5$

(b)  $10 + 3e^{0.1t} = 14$

(c)  $\ln x = 5$

(d)  $3 + 2\ln x^2 = 7$

<解> (a) 因為欲求解的  $x$  在指數函數內, 故將原式兩邊同取  $\ln$ , 得

$$\ln e^x = \ln 5$$

再根據  $e^x$  與  $\ln x$  互為反函數, 得

$$x = \ln 5$$

(b) 將 10 移至等號右邊並同除 3, 得

$$e^{0.1t} = \frac{1}{3}(14 - 10) = \frac{4}{3}$$

同理, 因為欲求解的  $t$  在指數函數內, 故將上式兩邊同取  $\ln$ , 得

$$\ln e^{0.1t} = \ln \left( \frac{4}{3} \right)$$

再根據  $e^x$  與  $\ln x$  互為反函數, 由上式得

$$0.1t = \ln \left( \frac{4}{3} \right)$$

故,

$$t = \frac{1}{0.1} \ln \left( \frac{4}{3} \right) = 10 \ln \left( \frac{4}{3} \right)$$

(c) 因為欲求解的  $x$  在對數函數內, 故將原式兩邊同取  $e$ , 得

$$e^{\ln x} = e^5$$

接著, 根據  $\ln x$  與  $e^x$  互為反函數, 由上式得

$$x = e^5$$

(d) 將 3 移至等號右邊並同除 2, 得

$$\ln x^2 = \frac{1}{2}(7 - 3) = 2$$

因為欲求解的  $x$  在對數函數內, 故將上式兩邊同取  $e$ , 得

$$e^{\ln x^2} = e^2$$

再根據  $\ln x$  與  $e^x$  互為反函數, 由上式得

$$x^2 = e^2$$

故,

$$x = \pm e$$

例 2. 設本金為  $P$ , 年利率為  $r$ , 且以連續複利計算. 試問經過幾年後, 結餘為本金的二倍?

<解> 首先, 根據連續複利的公式,  $t$  年後的結餘

$$A = Pe^{rt}$$

故原問題乃相當於求  $t$  使得

$$Pe^{rt} = 2P$$

同除  $P$ , 亦相當於

$$e^{rt} = 2$$

兩邊同取  $\ln$ , 得

$$\ln e^{rt} = \ln 2$$

再根據  $e^x$  與  $\ln x$  互為反函數, 由上式得

$$rt = \ln 2$$

故,

$$t = \frac{1}{r} \ln 2$$

與年利率成反比且比率常數為  $\ln 2$ , 與經驗相符, 如

$r$	3%	8%
$t$	$\frac{1}{0.03} \ln 2 = 23.1$	$\frac{1}{0.08} \ln 2 = 8.7$
$r$	10%	
$t$	$\frac{1}{0.1} \ln 2 = 6.9$	