單元 28: 對數函數的導函數
(課本 §4.5)

一. 自然對數函數的導函數

因爲 e^x 與 $\ln x$ 互爲反函數, 故對於 $x > 0$,

$$e^{\ln x} = x$$

將兩邊對 x 微分, 得

$$\frac{d}{dx}[e^{\ln x}] = \frac{d}{dx}[x] \tag{1}$$

接著, 根據自然指數函數的導函數公式

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

由 (1) 式, 得

$$e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] = 1$$

亦相當於

$$x \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] = 1$$

故, 兩邊同除 x, 得

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \tag{2}$$

又設 u 為 x 的可微函數, 則根據連鎖法則及 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln u] &= \frac{d}{du}[\ln u]\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{u}\cdot u'\end{aligned}$$

結論: 設 u 為 x 的可微函數. 則

(1) 對於自然對數函數,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

亦即, 自然對數的導函數就是自變數的倒數.

(2) 對於自然對數函數與可微函數的合成函數,

$$\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot u'$$

亦即, 自然對數合成函數的導函數就是內部函數的倒數乘以內部函數的導函數.

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$

(b) $g(x) = x \ln x$

(c) $h(x) = \ln \sqrt{3x + 1}$

(d) $k(x) = \ln \left[\dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3+1}} \right]$

<解> (a) 因爲 f 爲自然對數函數的合成函數, 故根據上述結論 (2) 的公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x^2+4} \cdot (2x^2+4)' \\ &= \frac{4x}{2x^2+4} \end{aligned}$$

(b) 根據乘積法則以及自然對數函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' \ln x + x(\ln x)' \\ &= (1) \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

(c) 首先, 根據對數律將 h 改寫爲

$$h(x) = \ln(3x+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(3x+1)$$

如此可避免直接微分時, 會用到較複雜的廣義冪次法則以及化簡過程.

接著, 根據純量乘積法則以及自然對數合成函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)' \\ &= \frac{3}{2(3x+1)} \end{aligned}$$

(d) 首先, 根據對數律改寫, 得

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln[x(x^2+1)^2] - \ln(2x^3+1)^{1/2} \\ &= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3+1) \end{aligned}$$

因此, 逐項微分並根據自然指數函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' - \\ &\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^3+1}\cdot(2x^3+1)' \\ &= \frac{1}{x} - \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3+1} \end{aligned}$$

註. 例 1 (d) 小題的化簡有其必要, 否則直接微分時會用到較複雜的分式法則, 廣義冪次法則, 而產生繁瑣以及容易錯誤的過程, 請自行試試. 根據例 1 (c) 與 (d) 小題的經驗, 在處理自然對數合成函數的微分時, 若可行, 則有必要先根據對數律化簡, 再微分, 切記.

例 2. 試繪函數

$$f(x) = x^2 - \ln x$$

的圖形.

<解> 首先, 函數 f 的定義域爲 $x > 0$, 因爲 f 的組成部份 $\ln x$ 的定義域爲 $x > 0$.

(i) 當 x 由右任意靠近 0 時,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x^2 - \ln x) \\ &= 0 - \ln 0^+ \\ &= 0 - (-\infty) = \infty \end{aligned}$$

故, 根據定義, 得

$$x = 0$$

爲一垂直漸近線.

(ii) 求相對極值. 根據自然對數函數的導函數公式, 對 x 微分並化簡, 得

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於分子

$$2x^2 - 1 = 0$$

得

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

故,

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (負不合)}$$

因爲定義域爲 $x > 0$.

無第二類臨界數, 因爲 f' 在 f 的定義域 $x > 0$ 上恆定義.

驗證: 根據所得的一個臨界數, 得二個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$: $f'=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, 遞增.

故, f 在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 有相對極小值, 亦爲絕對最小值,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃因爲

$$\ln 1=0$$

所致.

(iii) 求反曲點. 再對 x 微分, 得

$$f''(x)=2+\frac{1}{x^2}$$

因爲在 f 的定義域 $x>0$ 上, f'' 恆定義且爲正, 故無第一類及第二類反曲候選點, 而無反曲點. 又 f'' 恆爲正, 故 f 恆爲上凹.

(iv) 描點與連結. 描出所求得的絕對最小值, 繪出垂直漸近線 $x=0$, 並將 f' 與 f'' 的符號分別標記在 x 軸的

上方與下方, 再逐次地由左至右, 在每個子區間上, 根據遞增遞減性以及凹性, 繪出對應的曲線, 並連結所描出的點, 如下述及圖示.

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

因此, 得 f 的圖形, 如圖示.

二. 其它底數的指數與對數函數

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

指數函數

$$a^x$$

爲一對一函數, 故有反函數, 並稱此反函數爲, 以 a 爲底數的對數函數, 且表示成

$$\log_a x$$

亦即,

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

如圖示.

(i) 性質. 根據 a^x 與 $\log_a x$ 互爲反函數, 得

(1) 對於 $x > 0$,

$$a^{\log_a x} = x$$

(2) 對於 $-\infty < x < \infty$,

$$\log_a a^x = x$$

例如,

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

且

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) &= \log_{10} 10^{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

以及

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

(ii) 換底公式. 將底數 a 換成底數 e 公式爲

(1) 指數函數:

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

(2) 對數函數:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

爲何如此? 根據 e^x 與 $\ln x$ 互爲反函數, 故先取對數再取指數, 可相互抵銷, 得

$$a^x = e^{\ln a^x}$$

再根據對數律化簡上式的等號右邊, 得

$$a^x = e^{x \ln a} = e^{(\ln a)x}$$

如所求.

根據 a^x 與 $\log_a x$ 互爲反函數, 得

$$a^{\log_a x} = x$$

將上式兩邊同取 ln, 並根據對數律化簡, 得

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln a^{\log_a x} \\ &= (\log_a x)\ln a \end{aligned}$$

最後, 將上式兩邊同除 $\ln a$, 得

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

如所求.

例如,

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$$

且

$$\log_3 6 = \frac{\ln 6}{\ln 3} \approx 1.631$$

以及

$$\begin{aligned}\log_{16} 0.25 &= \frac{\ln 0.25}{\ln 16} \\ &= \frac{\ln 2^{-2}}{\ln 2^4} = \frac{-2\ln 2}{4\ln 2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

三. 一般指數與對數函數的導函數

設 u 爲 x 的可微函數, 以及 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 則

(1) 底數爲 a 的指數函數:

$$\frac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$$

且

$$\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \cdot \frac{du}{dx}$$

亦即, 指數函數的導函數還是有一項爲函數本身, 但要乘上 $\ln a$; 若爲合成函數, 則需再乘上內部函數的導函數 u'.

(2) 底數爲 a 的對數函數:

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{x}$$

且

$$\frac{d}{dx}[\log_a u] = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

亦即, 對數函數的導函數還是有一項爲倒數, 但要除上 $\ln a$; 若爲合成函數, 則需再乘上內部函數的導函數 u'.

爲何如此?

(1) 首先, 根據指數函數的換底公式,

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

再根據自然指數合成函數的導函數公式以及換底公式, 將上式兩邊對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[a^x] &= \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] \\ &= e^{(\ln a)x}\cdot\frac{d}{dx}[(\ln a)x] \\ &= a^x\cdot\ln a = (\ln a)a^x\end{aligned}$$

得證.

最後, 根據連鎖法則以及上式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[a^u] &= \frac{d}{du}[a^u]\cdot\frac{du}{dx} \\ &= (\ln a)a^u\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

如所求.

(2) 首先, 根據對數函數的換底公式,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

再根據純量乘積法則以及自然對數函數的導函數公式, 將上式兩邊對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\log_a x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] \\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}[\ln x] = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{x}\end{aligned}$$

得證.

最後, 根據連鎖法則以及上式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\log_a u] &= \frac{d}{du}[\log_a u]\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

如所求.

例 3. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x)=\log_5(x^2+6x)$

(b) $g(x)=6^{5x^2+2x}$

(c) $h(x)=x3^{1-x}$

<解> (a) 因爲 f 是底數爲 5 的對數合成函數, 故根據一般對數函數的導函數公式,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{\ln 5}\right)\frac{1}{x^2+6x}\cdot(x^2+6x)'\\ &= \left(\frac{1}{\ln 5}\right)\frac{2x+6}{x^2+6x}\end{aligned}$$

(b) 因為 g 是底數為 6 的指數合成函數, 故根據一般指數函數的導函數公式,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\ln 6)6^{5x^2+2x} \cdot (5x^2+2x)' \\ &= (\ln 6)6^{5x^2+2x} \cdot (10x+2) \\ &= 2(\ln 6)(5x+1)6^{5x^2+2x} \end{aligned}$$

(c) 根據乘積法則以及一般指數函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x)'3^{1-x} + x(3^{1-x})' \\ &= (1)3^{1-x} + x \cdot (\ln 3)3^{1-x}(1-x)' \\ &= 3^{1-x} + x \cdot (\ln 3)3^{1-x}(-1) \\ &= [1-(\ln 3)x]3^{1-x} \end{aligned}$$