

## 單元 31: 廣義冪次法則

(課本 §5.2)

複習. 簡單冪次法則爲, 對於  $n \neq -1$ ,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

問. 不定積分

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$$

爲何?

答. 因爲被積函數含有  $(x^2 + 1)$  的 3 次方項, 根據不定積分或反導函數的定義, 不定積分應含有  $(x^2 + 1)$  的 4 次方項, 故根據微分的廣義冪次法則, 先考慮

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + 1)^4] = 4(x^2 + 1)^3 (2x)$$

接著, 將上式兩邊同除以 4, 得

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 \right] = 2x(x^2 + 1)^3$$

剛好就是被積函數.

因此，由不定積分的定義，

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$$

另類觀點：根據上述的推導，關鍵點乃在於  $(x^2 + 1)$  這一項的次方，由 3 經由反微分的過程增為 4，故令

$$u = x^2 + 1$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

並代入原不定積分，整理，且根據微分差

$$du = \frac{du}{dx} dx$$

以及積分的簡單冪次法則，得

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2 + 1)^3 dx &= \int (x^2 + 1)^3 (2x) dx \\ &= \int u^3 \frac{du}{dx} dx \\ &= \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C\end{aligned}$$

其中最後一個等式乃將  $u$  反代為  $(x^2 + 1)$ ，表成  $x$  的式子。

根據上述的代入以及微分差的引用, 可推廣出下述的廣義冪次法則.

廣義冪次法則.

設  $u$  為  $x$  的可微函數, 則對於  $n \neq -1$ ,

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

問. 如何使用廣義冪次法則?

答. (i) 型式辨識 (pattern recognition).

重點乃在於辨識出被積函數中的一部分為  $u$ , 其餘的部分為  $\frac{du}{dx}$  的常數倍數, 再根據廣義冪次法則, 得出不定積分. 通常將被積函數中合成函數的內部函數視為  $u$ , 再設法將其餘的部分表成  $\frac{du}{dx}$  的某一倍數, 以例說明如下.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a)  $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 2} dx$

$$(b) \int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2} dx$$

$$(c) \int (2x+1)(x^2+x) dx$$

$$(d) \int x(3-4x^2)^2 dx$$

$$(e) \int 2(x^2+1)^2 dx$$

<解> (a) 因為被積函數中的合成函數部分為

$$\sqrt{x^3-2}$$

故根據上述型式辨識的原則, 視  $(x^3-2)$  為  $u$ , 並將被積函數的合成函數部分表成

$$(\text{函數})^n$$

的型式, 再由廣義冪次法則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{(x^3-2)^{1/2}}_{u^{1/2}} \underbrace{(3x^2)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(b) 首先, 可辨識出合成函數的部分爲

$$(1 - 2x^2)^{-2}$$

故根據型式辨識的原則, 視  $(1 - 2x^2)$  爲  $u$ , 並經由適當的改寫, 以及廣義冪次法則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \underbrace{(1 - 2x^2)^{-2}}_{u^{-2}} \underbrace{(-4x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -(1 - 2x^2)^{-1} + C\end{aligned}$$

(c) 雖然被積函數中沒有明顯的合成函數部分, 但兩項的乘積中,  $(2x + 1)$  項爲  $(x^2 + x)$  項的導函數, 故可視  $(x^2 + x)$  爲  $u$ , 並經由適當的改寫, 以及廣義冪次法則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \underbrace{(x^2 + x)}_u \underbrace{(2x + 1)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + C\end{aligned}$$

(d) 由題目可辨識出被積函數中合成函數的部分爲

$$(3 - 4x^2)^2$$

故根據型式辨識的原則, 視  $(3 - 4x^2)$  爲  $u$ , 並得

$$\frac{du}{dx} = -8x$$

但卻不是被積函數中其餘的部分  $x$ ，而差一個  $(-8)$  的常數倍數，故可經由乘以一個  $(-8)$ ，再除以一個  $(-8)$  的適當改寫，形成  $\frac{du}{dx}$ ，再根據積分的純量乘積法則以及廣義冪次法則，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left(-\frac{1}{8}\right) \underbrace{(3-4x^2)^2}_{u^2} \underbrace{(-8x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} (3-4x^2)^3 + C \\ &= -\frac{1}{24} (3-4x^2)^3 + C\end{aligned}$$

(e) 先做一個錯誤的示範，因為合成函數的部分為

$$(x^2 + 1)^2$$

故一個與前述各項解題經驗一致的作法為，視  $(x^2 + 1)$  為  $u$ ，並同乘除一個  $x$ ，形成  $\frac{du}{dx}$  後，得

$$\text{原式} = \int \frac{1}{x} \underbrace{(x^2 + 1)^2}_{u^2} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx$$

因為上式經由辨識及改寫後的被積函數內有一含  $x$  的項，不符合廣義冪次法則

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

中被積函數型式的要求，只可含  $u^n$  項， $\frac{du}{dx}$  項，以及  $dx$  項，故廣義冪次法則不適用，而應改用其他的方法，切勿將含有  $x$  的項提出積分符號外，錯誤地使用廣義冪次法則，如

$$\begin{aligned}\text{原式} &\neq \frac{1}{x} \int \underbrace{(x^2 + 1)^2}_{u^2} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &\neq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3} (x^2 + 1)^3 + C\end{aligned}$$

再次地提醒，根據積分的純量乘積法則，只可將乘積中的常數提出積分符號外，絕對不可將含  $x$  的項提出來，如上述的錯誤示範。另外，經辨識改寫後，只有在被積函數中不含  $x$  項，亦即，符合廣義冪次法則中被積函數型式的要求下，才可使用廣義冪次法則，切勿任意地誤用，如上述的錯誤示範，而應改用其他的正確方法，如下述。

因為被積函數內有一個平方項，次方不大，故可將被積函數展開，形成一個多項式，再根據簡單冪次法則逐項積分，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int (2x^4 + 4x^2 + 2) dx \\ &= \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 2x + C\end{aligned}$$

(ii) 代入法 (substitution) 或變數變換 (change of variable).

重點乃在於將原被積函數的  $x$  與  $dx$ , 經由適當的代入及微分差的引用, 而轉換成  $u$  與  $du$  後, 再根據簡單冪次法則積分, 如令

$$u = f(x)$$

得微分差

$$du = f'(x)dx$$

並代入, 再根據簡單冪次法則, 對於  $n \neq -1$ , 得

$$\begin{aligned} \int \underbrace{[f(x)]^n}_{u^n} \underbrace{f'(x)dx}_{du} &= \int u^n du \\ &= \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \\ &= \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號乃是反代入, 將積分的結果表成  $x$  的數學式, 符合原題意的要求, 找一個以  $x$  為自變數的函數.

如同型式辨識法, 通常取被積函數中合成函數部分的內部函數為  $u$ , 並將其餘的部分表成微分差  $du$  的常數倍數, 在完全改寫成  $u$  與  $du$  的型式, 不可含有任何  $x$  的式子後, 才可根據簡單冪次法則求積分, 說明如下.

例 2. 試求下列各項不定積分.

$$(a) \int \sqrt{1-3x} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+4}} dx$$

$$(c) \int x^2(1-x^3)^{51} dx$$

<解> (a) 因為被積函數中的合成函數為

$$\sqrt{1-3x}$$

故令

$$u = 1 - 3x$$

得微分差

$$du = (1-3x)' dx = -3dx$$

由此得其餘的部分

$$dx = -\frac{1}{3} du$$

將  $u$  與  $dx$  代入, 得

$$\text{原式} = \int u^{1/2} \left(-\frac{1}{3}\right) du$$

因爲已將原式換成只含  $u$  與  $du$  的型式, 不含任何  $x$  的式子, 故根據積分的純量乘積法則, 以及簡單冪次法則, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (1 - 3x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

除了上述以  $dx$  代入的方式外, 也可採用類似型式辨識的方法, 適當地調整常數乘積, 將其餘的部分表成  $du$  的常數倍, 如乘以一個  $(-3)$ , 再除以一個  $(-3)$ , 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left(-\frac{1}{3}\right) (1 - 3x)^{1/2} (-3) dx \\ &= -\frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (1 - 3x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

自行選擇一個適合自己的方式即可, 不做方法上的強制.

(b) 明顯地, 被積函數中的合成函數爲

$$(x^3 + 3x + 4)^{-1/2}$$

故令

$$u = x^3 + 3x - 4$$

得

$$\begin{aligned} du &= (x^3 + 3x - 4)' dx \\ &= (3x^2 + 3) dx \\ &= 3(x^2 + 1) dx \end{aligned}$$

兩邊同除 3, 得其餘的部分

$$(x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} du$$

代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (x^3 + 3x + 4)^{-1/2} (x^2 + 1) dx \\ &= \int u^{-1/2} \left( \frac{1}{3} \right) du \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2u^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 3x + 4)^{1/2} + C \end{aligned}$$

(c) 由題目可觀察出被積函數中的合成函數為

$$(1 - x^3)^{51}$$

故令

$$u = 1 - x^3$$

得

$$du = -3x^2 dx$$

兩邊同除  $-3$ , 得其餘的部分

$$x^2 dx = -\frac{1}{3} du$$

將  $u$  與上式代入, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int (1 - x^3)^{51} x^2 dx \\ &= \int u^{51} \left(-\frac{1}{3}\right) du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{52} u^{52} + C \\ &= -\frac{1}{156} (1 - x^3)^{52} + C \end{aligned}$$