單元 53: 三角函數的積分
(課本 §8.5)

一. 互逆運算的三角函數積分公式

根據微分與積分的互逆性, 六個三角函數的積分公式如下,

(1) 因爲

$$\frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \frac{du}{dx}$$

故根據不定積分的定義,

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

(2) 因爲

$$\frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \frac{du}{dx}$$

故兩邊同乘 (-1), 得

$$\frac{d}{dx}[-\cos u] = \sin u \frac{du}{dx}$$

並根據不定積分的定義,

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

(3) 同理, 因為

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

故

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

(4) 因為

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

故

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

(5) 類似於 (2), 因為

$$\frac{d}{dx}[\cot u] = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

故同乘 (-1), 並根據不定積分的定義,

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

(6) 同理, 因為

$$\frac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

故同乘 (-1), 且根據不定積分的定義,

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

二. 代入法的三角函數積分公式

根據代入法, 另外四個基本三角函數的積分公式爲

(1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

(2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

(3) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(4) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

<證> (1) 根據 $\tan x$ 的定義, 以及選取

$$u = \cos x,\ du = -\sin x dx$$

的代入法, 並由積分的對數法則, 得

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{-\sin x dx}_{du} \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

如所求.

註. 根據對數律, 以及 $\sec x$ 的定義, 上式亦相當於

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \ln|\cos x|^{-1} + C \\ &\overset{\text{或}}{=} \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

(2) 同理, 由 $\cot x$ 的定義, 以及選取

$$u = \sin x, \ du = \cos x dx$$

的代入法, 且根據積分的對數法則, 得

$$\begin{aligned}\int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{du} \\ &= \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

得證.

(3) 首先, 分子與分母同乘

$$\sec x + \tan x$$

並整理, 得

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \quad (1) \end{aligned}$$

接著, 令

$$u = \sec x + \tan x$$

則

$$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

剛好就是由 (1) 式中的分子.

故根據代入法, 由 (1) 式, 以及積分的對數法則, 得

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

得證.

(4) 類似於 (3), 將分子分母同乘

$$\csc x - \cot x$$

並整理, 得

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx \\ &= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx \quad (2)\end{aligned}$$

接著, 令

$$u = \csc x - \cot x$$

則

$$du = (-\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$$

剛好就是 (2) 式的分子.

故根據代入法, 由 (2) 式, 以及積分的對數法則, 得

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|\csc x - \cot x| + C\end{aligned}$$

如所求.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int x^2 \cos(x^3) dx$

(b) $\int \sec 4x \tan 4x dx$

(c) $\int e^x \sec^2(e^x) dx$

(d) $\int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + 2} dx$

(e) $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$

(f) $\int x \sec^2 x dx$

<解> (a) 因爲被積函數中的合成函數爲

$$\cos(x^3)$$

故根據選取

$$u = x^3,\ du = 3x^2 dx$$

的代入法, 以及 $\cos u$ 的積分公式, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{3}\int \underbrace{\cos(x^3)}_{\cos u} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{du} \\ &= \frac{1}{3}\sin u + C \\ &= \frac{1}{3}\sin(x^3) + C \end{aligned}$$

(b) 根據選取

$$u = 4x,\ du = 4dx$$

的代入法, 以及 $\sec u \tan u$ 的積分公式, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4}\int \underbrace{\sec 4x \tan 4x}_{\sec u \tan u} \cdot \underbrace{4dx}_{du} \\ &= \frac{1}{4}\sec u + C \\ &= \frac{1}{4}\sec 4x + C \end{aligned}$$

(c) 顯然地, 被積函數中的合成函數爲

$$\sec^2(e^x)$$

故根據選取

$$u = e^x,\ du = e^x dx$$

的代入法，以及 $\sec^2 u$ 的積分公式，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \underbrace{\sec^2(e^x)}_{\sec^2 u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{du} \\
&= \tan u + C \\
&= \tan(e^x) + C
\end{aligned}$$

(d) 這是一個分式的積分，且分母的導函數剛好就是分子，故根據選取

$$u = \sec x + 2,\ du = (\sec x \tan x)dx$$

的代入法，以及積分的對數法則，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \underbrace{\frac{1}{\sec x + 2}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{(\sec x + \tan x)dx}_{du} \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|\sec x + 2| + C
\end{aligned}$$

(e) 沒有直接可用的積分公式，故展開被積函數，並根據三角函數的恆等式，以及倍角公式整理，得

$$\begin{aligned}
&\text{原式} \\
&= \int (\sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x)dx \\
&= \int (1 + \sin 4x)dx
\end{aligned}$$

接著，逐項積分，並根據選取

$$u = 4x, \ du = 4dx$$

的代入法，由上式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x + \frac{1}{4}\int \underbrace{\sin 4x}_{\sin u} \cdot \underbrace{4dx}_{du} \\ &= x + \frac{1}{4}(-\cos u) + C \\ &= x - \frac{1}{4}\cos 4x + C \end{aligned}$$

(f) 若被積函數沒有 x，則有直接可用的三角函數積分公式，此乃提示選取

$$u = x, \ du = dx$$

以及

$$dv = \sec^2 dx, \ v = \int \sec^2 dx = \tan x$$

的分部積分，並根據分部積分的公式以及 $\tan x$ 的積分公式，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= uv - \int v du \\ &= x\tan x - \int \tan x dx \\ &= x\tan x - (-\ln|\cos x|) + C \\ &= x\tan x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

因此, 定積分

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} x\sec^2 x\,dx &= (x\tan x + \ln|\cos x|)\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \left(\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) \\
&\qquad -(0+\ln|\cos 0|) \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$