

單元 12: 連鎖規則

(課本 §2.5)

一. 連鎖規則 (Chain Rule)

一種求合成函數的導函數的方法.

設

$$y = f(u)$$

爲 u 的可微函數, 亦即,

$$\frac{dy}{du}$$

存在, 且

$$u = g(x)$$

爲 x 的可微函數, 亦即,

$$\frac{du}{dx}$$

存在, 則

$$y = f(g(x))$$

是 x 的可微函數且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

或

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

註 1. 如圖示, 將 x 看成原料, $u = g(x)$ 看成半成品, 以及 $y = f(g(x))$ 看成成品, 則

成品對原料的變化率

$$= (\text{成品對半成品的變化率}) \cdot (\text{半成品對原料的變化率})$$

以數學式子表示, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

亦相當於

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

註 2. 將 $y = f(g(x))$ 中的 f 視為外部函數, g 視為內部函數, 則

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(g(x))] \\ = (\text{外部函數的導函數, 代入內部函數, 半成品}) \cdot \\ (\text{內部函數的導函數}) \end{aligned}$$

也就是說,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

切不可代入內部函數的導函數, 如

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))g'(x)$$

註 3. 連鎖規則不同於加減規則, 絕對不可以將每個函數微分後再合成, 亦即, 不可以逐項微分再做對應的合成運算, 如

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))$$

註 4. 使用連鎖規則前, 需先辨識出合成函數的組成, 如

$$y = \frac{1}{x+1}$$

的形成過程為

$$x \rightarrow u = x + 1 \rightarrow y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{u}$$

故

$$u = x + 1$$

且

$$y = \frac{1}{u} = u^{-1}$$

因此, 根據連鎖規則及幕次規則, 在逐項微分下,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (-u^{-2})(1) \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃是將半成品 u 以 $x+1$ 取代, 而表成原料 x 的式子, 因為題意是求成品 y 對原料 x 的變化率, 故須表成原料 x 的式子. 又例如

$$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$$

的形成過程為

$$\begin{aligned}x \rightarrow u &= 3x^2 - x + 1 \\ &\rightarrow y = \sqrt{3x^2 - x + 1} = \sqrt{u}\end{aligned}$$

故

$$u = 3x^2 - x + 1$$

且

$$y = \sqrt{u} = u^{1/2}$$

因此，根據連鎖規則及冪次規則，在逐項微分下，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right)(6x-1) \\ &= \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}\end{aligned}$$

二. 廣義冪次規則 (General Power Rule)

設函數

$$y = [u(x)]^n$$

其中

$$u(x)$$

為 x 的可微函數，亦即，

$$\frac{du}{dx} = u'(x)$$

存在，且 n 為一實數，則

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx}$$

或

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} \cdot u'$$

<證> 因為函數

$$y = [u(x)]^n$$

的形成過程為

$$x \rightarrow u = u(x) \rightarrow y = [u(x)]^n = u^n$$

故

$$u = u(x)$$

且

$$y = u^n$$

因此, 根據連鎖規則及幕次規則, 亦即,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{連鎖規則}) \\ &= \frac{d}{du}[u^n] \cdot \frac{du}{dx} \\ &= nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{幕次規則}) \\ &= n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

註. 廣義冪次規則可針對函數的次方求導函數, 而不僅只是自變數的次方, 故是冪次規則的推廣, 而稱為廣義冪次規則. 使用廣義冪次規則時, 除了對次方處理外, 一定要記得乘上因著連鎖規則而產生的 $u'(x)$, 亦即,

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $f(x) = (3x - 2x^3)^3$

(b) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

(c) $y = \frac{1}{(1 - x)^5}$

(d) $g(x) = \sqrt[4]{(2x - 1)^3}$

(e) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1 - 2x}}$

$$(f) \quad y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

$$(g) \quad y = \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 3} \right)^2$$

<解> 解題技巧: 將各項先改寫成 $c[u(x)]^n$ 的型式後, 再根據廣義冪次規則求導函數.

(a) 因為原式已是 $c[u(x)]^n$ 的型式, 故直接根據廣義冪次規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(3x - 2x^3)^2 \cdot (3x - 2x^3)' \\ &= 3(3x - 2x^3)^2(3 - 6x^2) \end{aligned}$$

(b) 首先, 可將 y 改寫成

$$y = 3(x^2 + 1)^{-1}$$

故根據廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} y' &= 3(-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot (x^2 + 1)' \\ &= -3(x^2 + 1)^{-2}(2x) \\ &= \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(c) 經由改寫, 得

$$y = (1 - x)^{-5}$$

故根據廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} y' &= -5(1 - x)^{-6} \cdot (1 - x)' \\ &= -5(1 - x)^{-6}(-1) \\ &= \frac{5}{(1 - x)^6} \end{aligned}$$

(d) 改寫後,

$$g(x) = (2x - 1)^{3/4}$$

故根據廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{4}(2x - 1)^{-1/4} \cdot (2x - 1)' \\ &= \frac{3}{4}(2x - 1)^{-1/4}(2) \\ &= \frac{3}{2}(2x - 1)^{-1/4} \\ &= \frac{3}{2\sqrt[4]{2x - 1}} \end{aligned}$$

(e) 因為乘法規則較除法規則單純, 故可將 $h(x)$ 改寫成

$$h(x) = x^{1/2}(1 - 2x)^{-1/3}$$

因此, 根據乘法規則及廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^{1/2})'(1-2x)^{-1/3} + \\ &\quad x^{1/2} [(1-2x)^{-1/3}]' \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2}(1-2x)^{-1/3} + \\ &\quad x^{1/2} \left(-\frac{1}{3}\right) (1-2x)^{-4/3}(-2) \end{aligned}$$

接著, 經由將各同類項的最小次方因式提出後的化簡, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{6}x^{-1/2}(1-2x)^{-4/3}[3(1-2x) + 4x] \\ &= \frac{3-2x}{6x^{1/2}(1-2x)^{4/3}} \\ &\underline{\underline{\text{或}}} \\ &\underline{\underline{=}} \frac{3-2x}{6\sqrt{x} \sqrt[3]{(1-2x)^4}} \end{aligned}$$

(f) 因為原式可改寫成

$$y = x^2(1-x^2)^{1/2}$$

故根據乘法規則及廣義冪次規則,

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'(1-x^2)^{1/2} + x^2 [(1-x^2)^{1/2}]' \\ &= 2x(1-x^2)^{1/2} + \\ &\quad x^2 \left(\frac{1}{2}\right) (1-x^2)^{-1/2}(-2x) \end{aligned}$$

最後，將各同類項的最小次方提出並化簡，得

$$\begin{aligned}y' &= x(1-x^2)^{-1/2}[2(1-x^2) - x^2] \\ &= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

(g) 將小括號內的分式視為一整體，則根據廣義冪次規則及除法規則，得

$$\begin{aligned}y' &= 2 \left(\frac{3x-1}{x^2+3} \right) \cdot \left(\frac{3x-1}{x^2+3} \right)' \\ &= 2 \left(\frac{3x-1}{x^2+3} \right) \cdot \frac{3(x^2+3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} \\ &= 2 \left(\frac{3x-1}{x^2+3} \right) \cdot \frac{-3x^2+2x+9}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}\end{aligned}$$

三. 微分規則摘要

(1) 常數規則:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

(2) 常數乘法規則:

$$\frac{d}{dx}[cu] = c \frac{du}{dx}$$

(3) 加減規則:

$$\frac{d}{dx}[u \pm v] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

(4) 乘法規則:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u'v + uv'$$

(5) 除法規則:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(6) 幕次規則:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \quad (\text{簡單型})$$

以及

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} \cdot u' \quad (\text{廣義型})$$

(7) 連鎖規則:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$