

## 單元 14: 隱微分

(課本 §2.7)

二變數  $x$  與  $y$  之間的關係表示法有如下 2 種.

(i) 明確式 (explicit form):

$$y = f(x)$$

如

$$y = 3\sqrt{x} - 5$$

則其導函數

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{-1/2}$$

又如位置函數

$$s = -16t^2 + 4t + 70$$

則速度

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 4$$

以及

$$u = 3w - 2w^7 + 6$$

時, 則其導函數

$$\frac{du}{dw} = 3 - 14w^6$$

(ii) 隱藏式 (implicit form):

$$F(x, y) = 0$$

僅以一含  $x$  與  $y$  的方程式表示它們間的關係, 而不是明確地以  $x$  的函數表示  $y$ , 如

$$xy = 1$$

問.  $y$  對  $x$  的導函數  $\frac{dy}{dx}$  為何?

答. 首先, 解  $y$ , 得

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

故,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

又如

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

問.  $y$  對  $x$  的導函數  $\frac{dy}{dx}$  為何?

答. 此時不易解  $y$ , 但可用隱微分 (implicit differentiation) 求  $\frac{dy}{dx}$ , 如下述.

(1) 將等式兩邊均對  $x$  微分, 並視  $y$  為  $x$  的函數, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2y^3 + 4y) = \frac{d}{dx}(2)$$

亦即,

$$2x - 2(3)y^2 \frac{dy}{dx} + 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

其中等號左邊的第二項乃根據廣義冪次規則以及視  $y$  為  $x$  的函數所致, 等號左邊的第三項乃因為以隱藏的方式表現  $y$  為  $x$  的函數, 故無法明確地求出導函數, 因而直接以  $\frac{dy}{dx}$  表示導函數.

(2) 解  $\frac{dy}{dx}$ . 將含有  $\frac{dy}{dx}$  的各項移至等號左邊並提出  $\frac{dy}{dx}$ , 其餘各項移至等號右邊, 得

$$\frac{dy}{dx}(4 - 6y^2) = -2x$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4 - 6y^2}$$

這也是以一個隱藏的方式表示導函數  $\frac{dy}{dx}$ , 因為在等號的右邊含有原本就無法以明確的方式表示的函數

$y$ , 而不是僅含  $x$  的數學式, 這是先天所致, 無法改善, 但至少表現出導函數  $\frac{dy}{dx}$  與  $x$  和  $y$  的關係, 在應用時需要進一步地求出  $x$  所對應的  $y$  值, 在許多情況下, 這是可接受的.

### 例 1. 試求橢圓

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad (1)$$

上, 過點  $\left(\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$  的切線.

<解> 首先將此點代入 (1) 式的左邊, 得

$$(\sqrt{2})^2 + 4\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

剛好就是 (1) 式的右邊, 故此點確實是橢圓上的一點.

接者, 以隱微分求  $\frac{dy}{dx}$ , 如下述.

(1) 將等式兩邊均對  $x$  微分, 並視  $y$  為  $x$  的函數, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

根據廣義冪次規則, 由此可導出

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

(2) 解  $\frac{dy}{dx}$ . 經由移項並同除  $8y$ , 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$$

最後, 由導函數的意義, 過此點的切線斜率

$$m = \frac{dy}{dx} \left( \sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{4 \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

故根據點斜式, 過此點的切線為

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$$

或

$$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$$

例 2. 設

$$x^2y + y^2x = -2$$

試求  $\frac{dy}{dx}$ .

<解> 因為是以一個方程式隱藏地表示  $x$  與  $y$  的關係, 當然可以先嘗試解  $y$  後, 再求  $\frac{dy}{dx}$ , 但經常是不容易解出  $y$ , 因而一個替代的方式乃是直接以隱微分求  $\frac{dy}{dx}$ , 如下述.

(1) 將等式兩邊均對  $x$  微分, 並視  $y$  為  $x$  的函數, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2y + y^2x) = \frac{d}{dx}(-2)$$

根據乘法規則與廣義冪次規則, 由上式得

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} x + y^2(1) = 0$$

(2) 解  $\frac{dy}{dx}$ . 在等號左邊合併含  $\frac{dy}{dx}$  的各項, 並將其餘各項移至等號右邊, 得

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2yx) = -y^2 - 2xy$$

因此,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$$

例 3. 設某產品的需求函數

$$p = \frac{3}{0.000001x^3 + 0.01x + 1}$$

其中  $p$  的單位為元,  $x$  的單位為千件. 試求當  $x$  為 100 時, 銷售量  $x$  對售價  $p$  的變化率.

<解> 根據題意乃相當於求  $\frac{dx}{dp}$ , 不是求  $\frac{dp}{dx}$ , 故直接的作法乃是先解出  $x$  後, 再求  $\frac{dx}{dp}$ , 但卻不容易解  $x$ , 因而替

代的方法乃是在不需解  $x$  的情況下, 採用隱微分求  $\frac{dx}{dp}$ , 如下述.

(1) 爲方便計, 先改寫原式, 得

$$0.000001x^3 + 0.01x + 1 = \frac{3}{p}$$

(2) 將等式兩邊均對  $p$  微分, 並視  $x$  爲  $p$  的函數, 得

$$0.000003x^2 \frac{dx}{dp} + 0.01 \frac{dx}{dp} = \frac{-3}{p^2}$$

(3) 解  $\frac{dx}{dp}$ , 得

$$\frac{dx}{dp}(0.000003x^2 + 0.01) = \frac{-3}{p^2}$$

因此,

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-3}{p^2(0.000003x^2 + 0.01)}$$

因爲  $\frac{dx}{dp}$  並不是明確地以  $x$  呈現, 故需先求出對應的  $p$  值, 亦即, 當  $x = 100$  時,

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{0.000001(100)^3 + 0.01(100) + 1} \\ &= \frac{3}{1 + 1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

最後, 將  $x = 100$  及  $p = 1$  代入  $\frac{dx}{dp}$ , 得

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dp}(1, 100) &= \frac{-3}{1^2[0.000003(100)^2 + 0.01]} \\ &= \frac{-3}{0.03 + 0.01} \\ &= \frac{-3}{0.04} = -75\end{aligned}$$

此乃表示當  $x = 100$  時, 亦即, 100000 件時, 售價增加 1 元, 會導致需求量減少 75000 件.