單元 16: 遞增與遞減函數
(課本 §3.1)

定義 1. 函數 f 在一區間上遞增 (increasing) 若且爲若對區間中任意的二點 $x_1 < x_2$, 可得

$$f(x_1) < f(x_2)$$

如圖示.

定義 2. 函數 f 在一區間上遞減 (decreasing) 若且爲若對區間中的任意二點 $x_1 < x_2$, 可得

$$f(x_1) > f(x_2)$$

如圖示.

問. 如何判斷函數 f 是遞增或遞減?

觀察. 根據圖示, 得

(1) 當 $x < a$ 時, f 的圖形呈現遞減, 且對應的切線斜率 $f' < 0$.

(2) 當 $a < x < b$ 時, f 的圖形爲一水平線, 乃一常數, 而此時的切線斜率 $f' = 0$.

(3) 當 $x > b$ 時, f 的圖形呈現遞增, 且對應的切線斜率 $f' > 0$.

似乎暗示可用 f' 的正負性來判斷 f 的遞增遞減性.

答. 確實可用 f' 判斷遞增遞減性, 如下述.

遞增遞減性檢定法. 令函數 f 在開區間 (a, b) 上可微.

(1) 若對所有 (a, b) 中的 x (以 $x \in (a, b)$ 表示), $f'(x) > 0$, 則 f 在 (a, b) 上遞增, 如圖示.

(2) 若對所有的 $x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$, 則 f 在 (a, b) 上遞減, 如圖示.

(3) 若對所有的 $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$, 則 f 在 (a, b) 上爲一常數, 如圖示.

問. 如何決定函數 f 在何時是遞增? 何時是遞減?

觀察. 根據圖示, 得

(1) 存在一個點 $x = c$, 使得 $f'(c) = 0$, 且當 $x < c$ 時, $f'(x) > 0$, 得 f 遞增; 當 $x > c$ 時, $f'(x) < 0$, 得 f 遞減.

(2) 存在一個點 $x = c$, 使得 f 在 $x = c$ 連續, 但 $f'(c)$ 未定義, 且當 $x < c$ 時, $f'(x) < 0$, 得 f 遞減; 當 $x > c$ 時, $f'(x) > 0$, 得 f 遞增.

(3) 存在一個非連續點 $x = c$, 且當 $x < c$ 時, $f'(x) > 0$, 得 f 遞增; 當 $x > c$ 時, $f'(x) < 0$, 得 f 遞減.

(4) 存在一個非連續點 $x = c$, 且當 $x < c$ 時, $f'(x) > 0$, 得 f 遞增; 當 $x > c$ 時, $f'(x) > 0$, 得 f 遞增.

綜合上述, 得導函數 f' 在三種點: 使得 (i) $f'(c) = 0$ 或 (ii) $f'(c)$ 未定義或 (iii) f 不連續的點 $x = c$ 的附

近, 可能會變號, 也就是說, f 由遞增變爲遞減, 或由遞減變爲遞增, 而得知 f 在何時爲遞增或何時爲遞減. 爲方便下述的發展以及此種點的特性, 予以定義如下.

定義 3. 設函數 f 在點 $x = c$ 有定義, 若

$$f'(c) = 0 \text{ (第一類)}$$

或

$$f'(c) \text{ 未定義 (第二類)}$$

則稱 c 爲 f 的一個臨界數 (critical number).

答. 根據上述, 得出判斷函數 f 何時爲遞增, 何時爲遞減的原則:

(i) 收集重要點: (1) 非連續點, (2) 臨界數.

(ii) 將 (i) 中的重要點排列在實數線上, 而區分成數個子區間.

(iii) 針對 (ii) 中的每一個子區間, 任取其中一點, 決定 f' 在其上的符號, 並根據 "$+$", 得 f 遞增; "$-$", 得 f 遞減.

註. 爲何任取子區間中一點而得出的 f' 的值, 就可決定 f' 在此子區間上的符號? 因爲臨界數涵蓋了所有使得 $f'=0$ 的點, 故由重要點所分割形成的子區間中, 在一般 f' 爲連續的情形下, 根據勘根定理, 在一個子區間內只可能有一種符號, 不可能有兩種以上的符號, 否則就會得出另外使得 $f'=0$ 的點, 而產生矛盾, 因此可由子區間中任一點的 f' 值而決定出 f' 在整個子區間上的符號.

例 1. 令函數

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$$

試問 f 何時遞增, 何時遞減?

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲 f 爲多項式, 故連續, 無任何非連續點.

(2) 臨界數: 根據定義, 乃使得 f' 爲 0, 或未定義的 x, 故需經由微分並分解, 得

$$f'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$$

第一類臨界數乃相當於 $f'=0$ 的 x, 亦即,

$$3x(x-1)=0$$

故,

$$x = 0,\ 1$$

第二類臨界數乃 f' 未定義的 x, 無, 因爲 f' 爲多項式, 在整個實數線上都有定義.

(ii) 決定 f' 的符號. 根據 (i) 中的重要點, 得三個子區間, 如圖示. 接著, 決定 f' 在每個子區間上的符號, 如下述.

$(-\infty, 0)$: 取 $x = -1$ 代入 f', 得

$$f'(-1) = (-)(-) = (+),\ \text{遞增}$$

$(0, 1)$: 取 $x = \frac{1}{2}$ 代入 f', 得

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (+)(-) = (-),\ \text{遞減}$$

$(1, \infty)$: 取 $x = 2$ 代入 f', 得

$$f'(2) = (+)(+) = (+),\ \text{遞增}$$

因此, f 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(1, \infty)$ 上遞增; 在 $(0, 1)$ 上遞減.

例 2. 令函數

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

試判斷 f 的遞增, 遞減性.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲 f 爲一多項式的 2/3 次方, 故在整個實數線上均連續.

(2) 臨界數: 根據廣義冪次規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \\ &= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \end{aligned}$$

第一類: $f' = 0$, 亦相當於分子 $4x = 0$, 故

$$x = 0$$

第二類: f' 未定義, 乃相當於分母等於 0, 亦相當於

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0$$

得

$$x = -2,\ 2$$

(ii) 決定 f' 的符號. 根據 (i) 中的重要點, 得四個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如圖示及下述.

$(-\infty,-2)$: $f'=\frac{(-)}{(+)}=(-)$, 遞減.

$(-2,0)$: $f'=\frac{(-)}{(-)}=(+)$, 遞增.

$(0,2)$: $f'=\frac{(+)}{(-)}=(-)$, 遞減.

$(2,\infty)$: $f'=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, 遞增.

因此, f 在 $(-2,0)$ 及 $(2,\infty)$ 上遞增; 在 $(-\infty,-2)$ 及 $(0,2)$ 上遞減.

例 3. 試判斷函數

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$$

的遞增, 遞減性.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 分母等於 0 的 x, 因爲此時 f 未定義, 故得 $x=0$.

(2) 臨界數: 經由改寫, 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2+x^{-2}) \\ &= 2x-2x^{-3}=\frac{2(x^4-1)}{x^3} \end{aligned}$$

第一類: $f' = 0$, 乃相當於分子等於 0, 亦即,
$x^4 - 1 = 0$, 故得

$$x = -1,\ 1$$

第二類: f' 未定義, 亦相當於分母等於 0, 亦即,

$$x^3 = 0$$

得 $x = 0$, 但卻不是一個臨界數, 而是一個非連續點, 此乃因爲臨界數的先決條件是必須在 f 的定義域內, 而 f 在 $x = 0$ 未定義, 故僅能歸類爲非連續點, 還是一個需要先找出的重要點.

(ii) 決定 f' 的符號. 根據 (i) 中的一個非連續點及兩個臨界數, 得 f' 在各子區間的符號如圖示及下述, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty, -1)$: $f' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, 遞減.

$(-1, 0)$: $f' = \frac{(-)}{(-)} = (+)$, 遞增.

$(0, 1)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(1, \infty)$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

因此, f 在 $(-1,0)$ 及 $(1,\infty)$ 上遞增; 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$ 上遞減.

例 4. 設某種遊樂器的成本模型爲

$$C=2.4x-0.0002x^2,\ 0\le x\le 6000$$

且收益模型爲

$$R=7.2x-0.001x^2,\ 0\le x\le 6000$$

試問何時利潤是遞增的?

<解> 根據題意, 是探討利潤的遞增性, 故需先求出利潤, 得利潤

$$\begin{aligned}P&=R-C\\&=7.2x-0.001x^2-2.4x+0.0002x^2\\&=4.8x-0.0008x^2\end{aligned}$$

接著, 由

$$P'=4.8-0.0016x=0$$

得

$$x=\frac{4.8}{0.0016}=3000$$

乃一臨界數.

又 P' 的符號圖 (sign chart), 如圖示及下述.

$(0, 3000)$: $P' = (+)$, 遞增.

$(3000, 6000)$: $P' = (-)$, 遞減.

故, 利潤在

$$0 < x < 3000$$

時爲遞增.