單元 18: 凹性與二階導函數檢定法
(課本 §3.3)

一. 凹性 (concavity)

觀察如下的圖示, 得

(1) 圖 1 顯示出函數 f 的圖形在切線之上, 且 f' 爲遞增, 由此導出圖形爲上凹 (concave upward).

(2) 圖 2 顯示出函數 f 的圖形在切線之下, 且 f' 爲遞減, 由此導出圖形爲下凹 (concave downward).

根據上述的觀察, 得凹性的

定義. 令函數 f 在開區間 I 上可微, 則 f 的圖形是

(1) 上凹 (concave upward), 若 f' 在 I 上遞增.

(2) 下凹 (concave downwand), 若 f' 在 I 上遞減.

除了視覺法, 亦可以下述的解析法判斷 f 的凹性.

凹性檢定法 (Test for Concavity). 設二階導函數 f'' 在 I 上存在, 則

(1) $f'' > 0$ 可導出 f 在 I 上爲上凹.

(2) $f'' < 0$ 可導出 f 在 I 上爲下凹.

爲何如此? (1) 根據定義, f 爲上凹乃相當於 f' 遞增. 而 f' 遞增又相當於 f' 的一階導函數

$$(f')' = f'' > 0$$

得證.

(2) 同理, f 爲下凹乃相當於 f' 遞減. 而 f' 遞減又相當於 f' 的一階導函數

$$(f')' = f'' < 0$$

得證.

因此, 判斷函數 f 的凹性的步驟爲

(i) 找重要點: (1) 非連續點, (2) 使得 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 未定義的 x 值.

(ii) 決定二階導函數 f'' 在 (i) 的點所產生的子區間上的符號, 並根據 “$+$”, 得 f 爲上凹; “$-$”, 得 f 爲下凹.

例 1. 試判斷函數

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

的凹性.

<解> 根據上述判斷凹性的步驟, (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲分母恆不等於 0, 爲一在整個數線上都有定義的有理函數, 故恆連續.

(2) $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 未定義. 首先, 經由改寫, 得

$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1}$$

接著, 根據廣義冪次規則, 兩次微分並化簡後, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6(-1)(x^2+3)^{-2}(2x) \\ &= -12x(x^2+3)^{-2} \end{aligned}$$

以及

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -12(x^2+3)^{-2} + 24x(x^2+3)^{-3}(2x) \\
&= \frac{-12(x^2+3)+48x^2}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}
\end{aligned}
$$

第一類: $f''=0$, 乃相當於分子等於 0, 亦相當於

$$x^2-1=0$$

得

$$x=-1,\ 1$$

第二類: f'' 未定義, 無, 因為分母 $(x^2+3)^3$ 恆大於 0.

(ii) 決定 f'' 的符號. 根據 (i) 中的重要點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty,-1)$: $f''=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, 上凹.

$(-1,1)$: $f''=\frac{(-)}{(+)}=(-)$, 下凹.

$(1,\infty)$: $f''=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, 上凹.

因此, f 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(1,\infty)$ 爲上凹; 在 $(-1,1)$ 爲下凹.

例 2. 試判斷函數

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x+1}$$

的凹性.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 分母等於 0 的 x, 因爲此時 f 未定義, 亦即,

$$2x+1=0$$

得非連續點

$$x=-\frac{1}{2}$$

(2) $f''=0$ 或 f'' 未定義. 根據除法規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x+1)-(x^2-1)(2)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

再根據除法規則, 得 $f''(x)$ 的分子爲

$$(4x+2)(2x+1)^2-(2x^2+2x+2)4(2x+1)$$

提出公因式 $2(2x+1)$, 得

$$2(2x+1)[(2x+1)^2-2(2x^2+2x+2)]$$

展開上式中的中括號並整理, 得

$$2(2x+1)(-3)$$

因此,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(2x+1)(-3)}{(2x+1)^4} \\ &= \frac{-6}{(2x+1)^3} \end{aligned}$$

第一類: $f''=0$, 無, 因爲分子 -6 恆不爲 0.

第二類: f'' 未定義, 乃相當於分母等於 0, 亦相當於

$$2x+1=0$$

得

$$x=-\frac{1}{2}$$

但歸類爲非連續點, 因爲第二類的先決條件是必須在 f 的定義域內, 而 f 在 $x=-\frac{1}{2}$ 未定義, 故僅能算爲一個非連續點, 但還是一個需要先找出的重要點.

(ii) 決定 f'' 的符號. 根據 (i) 中的一個非連續點, 得二個子區間及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$: $f'' = \frac{(-)}{(-)} = (+)$, 上凹.

$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$: $f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

因此, f 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 爲上凹; 在 $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ 爲下凹.

二. 反曲點 (point of inflection)

觀察如下的圖示, 得

(1) 圖 1 顯示, f 的圖形上凹至點 $(c, f(c))$ 後, 轉爲下凹, 且過點 $(c, f(c))$ 有一切線刻劃出此種凹性的改變.

(2) 圖 2 顯示, f 的圖形下凹至點 $(c, f(c))$ 後, 轉爲上凹, 且過點 $(c, f(c))$ 有一切線刻劃出此種凹性的改變.

(3) 圖 3 顯示, f 的圖形上凹至點 $(c, f(c))$ 後, 轉爲下凹, 且過點 $(c, f(c))$ 有一垂直切線刻劃出此種凹性的改變.

共同的現象是，在點 $(c, f(c))$ 附近，圖形的凹性改變，亦即，在此點有一切線刻劃出相反的兩種凹性，故予以定義如下，以反映此點的特性.

定義. 設函數 f 在點 $(c, f(c))$ 連續且有一切線. 若 f 在點 $(c, f(c))$ 附近的凹性改變，亦即，由上凹變為下凹，或由下凹變為上凹，則稱點 $(c, f(c))$ 為一反曲點 (point of inflection).

反曲點的性質. 若 $(c, f(c))$ 為 f 的反曲點，則 $f''(c) = 0$ 或 $f''(c)$ 未定義.

註 1. 由上述的反曲點性質知，反曲點只可能發生在 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 未定義的 x 值，故稱在 f 的定義域內，使得 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 未定義的 x 值為反曲候選數 (possible points of inflection). 另外，函數 f 的凹性在非連續點附近亦可能改變，如例 2. 所以，判斷函數 f 的凹性或找反曲點時，需由 (1) 非連續點以及 (2) 反曲候選數，這些所謂的重要點開始，將定義域分割成子區間，並根據 f'' 在每個子區間的符號做結論.

註 2. 綜合上述探討，得

(1) 一階導函數 f' 用於檢定函數 f 的遞增, 遞減性以及找相對極值.

(2) 二階導函數 f'' 用於檢定函數 f 的凹性以及找反曲點.

例 3. 試判斷函數

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$$

的凹性, 並求反曲點.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因為 f 為多項式, 恆連續.

(2) 反曲候選數: 經由微分及化簡, 得

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$$

以及

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 + 6x - 6 \\ &= 6(2x^2 + x - 1) \\ &= 6(2x-1)(x+1) \end{aligned}$$

第一類: $f''=0$, 亦相當於

$$(2x-1)(x+1)=0$$

得

$$x=-1,\ \frac{1}{2}$$

第二類: f'' 未定義, 無, 因爲 f'' 爲多項式, 恆定義.

(ii) 決定 f'' 的符號. 根據 (i) 中的重要點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty,-1)$: $f''=(-)(-)=(+)$, 上凹.

$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$: $f''=(-)(+)=(-)$, 下凹.

$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: $f''=(+)(+)=(+)$, 上凹.

因此, f 在區間 $(-\infty,-1)$ 及 $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ 內爲上凹; 在區間 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 內爲下凹.

因爲凹性在 $x=-1$ 與 $x=\frac{1}{2}$ 的附近均改變, 故得二個反曲點

$$(-1,f(-1))=(-1,-2)$$

其中

$$f(-1) = 1 - 1 - 3 + 1 = -2$$

以及

$$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}\right)$$

其中

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{16}$$

註 3. 不是所有的反曲候選數都會成爲反曲點, 如 (1) 若

$$f(x) = x^3$$

則

$$f'(x) = 3x^2$$

且

$$f''(x) = 6x$$

根據定義, 第一類反曲候選數: $f'' = 0$, 得

$$x = 0$$

又 f'' 在每個子區間的符號如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f'' = (-)$, 下凹.

$(0, \infty)$: $f'' = (+)$, 上凹.

在 $x = 0$ 附近的凹性改變, 得反曲點

$$(0, f(0)) = (0, 0)$$

如圖示.

(2) 若

$$g(x) = x^4$$

則

$$g'(x) = 4x^3$$

且

$$g''(x) = 12x^2$$

根據定義, 第一類反曲候選數: $g'' = 0$, 得

$$x = 0$$

且 g'' 在每個子區間的符號如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $g'' = (+)$, 上凹.

$(0,\infty)$: $g''=(+)$, 上凹.

在 $x=0$ 附近的凹性未變, 所以

$$(0,g(0))=(0,0)$$

不是一個反曲點, 如圖示.

因此, 反曲候選數在未以二階導函數的符號驗證前, 僅爲可能產生反曲點的 x 值, 需要經由二階導函數的符號驗證後, 才能確知是否會產生反曲點.

三. 二階導函數檢定法 (2nd-derivative test)

另一個求相對極值的方法, 但僅適用於第一類臨界數, 亦即, 使得 $f'(c)=0$ 的相對極值候選數 c.

觀察如下的圖示, 得

(1) 圖 1 顯示過 $(c,f(c))$ 有一水平切線, 即

$$f'(c)=0$$

c 爲第一類臨界數, 且在 $x=c$ 的附近爲下凹, 即

$$f''(c)<0$$

而導出 $f(c)$ 爲一相對極大值.

(2) 圖 2 顯示過

$$(c, f(c))$$

有一水平切線, 即 $f'(c) = 0$, c 爲第一類臨界數, 且在 $x = c$ 的附近爲上凹, 即

$$f''(c) > 0$$

而導出 $f(c)$ 爲一相對極小值.

根據上述的觀察, 得

二階導函數檢定法. 令

$$f'(c) = 0$$

即 c 爲第一類臨界數, 且 f'' 在一含 c 的開區間內存在.

(1) 若 $f''(c) > 0$, 則 $f(c)$ 爲一相對極小值.

(2) 若 $f''(c) < 0$, 則 $f(c)$ 爲一相對極大值.

(3) 若 $f''(c)=0$, 則無法判斷, 需回到一階導函數檢定法, 一種最基本且適用於任何情況, 並一定可判斷出的檢定法.

記憶法: 一種根據 f'' 的符號, 而便於得出結論的方法, 如下述.

(i) 若 $f''(c)>0$, 表示在 c 的左右, f'' 均爲 $+$, 可得一笑臉, 故 $f(c)$ 爲一相對極小值, 如圖示.

(ii) 若 $f''(c)<0$, 表示在 c 的左右, f'' 均爲 $-$, 可得一哭臉, 故 $f(c)$ 爲一相對極大值, 如圖示.

註. 爲何當 $f''(c)=0$ 時, 無法判斷? 因爲此時會有各種可能, 即 $f(c)$ 可能是相對極大值, 或相對極小值, 或不是相對極值; 僅知 $f''(c)=0$, 並無法充分地得出結論. 反例如下, (1) 若

$$f(x)=x^3$$

則

$$f'(x)=3x^2$$

且

$$f''(x) = 6x$$

故

$$f'(0) = 3(0)^2 = 0$$

且

$$f''(0) = 6(0) = 0$$

因此, 二階導函數檢定法失效. 回到一階導函數檢定法, 得 f' 在各子區間的符號如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)$, 遞增.

$(0, \infty)$: $f' = (+)$, 遞增.

故, 在 $x = 0$ 無相對極值, 如圖示.

(2) 若

$$g(x) = x^4$$

則

$$g'(x) = 4x^3$$

且

$$g''(x) = 12x^2$$

故

$$g'(0) = 4(0)^3 = 0$$

且

$$g''(0) = 12(0) = 0$$

因此, 無法根據二階導函數檢定法判斷. 但根據一階導函數檢定法, 得 g' 的符號圖如下.

$(-\infty, 0)$: $g' = (-)$, 遞減.

$(0, \infty)$: $g' = (+)$, 遞增.

故, 在 $x = 0$ 有一相對極小值, 事實上, 在僅有一個臨界數的情況下, 亦是一絕對最小值, 如圖示.

(3) 令

$$h(x) = -x^4$$

因爲 $h(x) = -g(x)$, 故根據對於 y 軸的對稱性或類似於前面的推導過程, 於二階導函數檢定法失效, 無法判斷

下, 在 $x = 0$ 有一相對極大值, 事實上, 亦是一絕對最大值, 如圖示.

綜合上述的三個例子, 在 $x = 0$ 的二階導函數均爲 0, 但卻有各種的可能結果, 故僅根據 $f''(c) = 0$, 無法充分地導出結論, 而需回到一階導函數檢定法作進一步的判斷.

例 4. 試以二階導函數檢定法求函數

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

的相對極值.

<解> (i) 求第一類臨界數. 事實上, 因爲 f 是多項式, 若有臨界數的話, 也僅有第一類臨界數. 經由微分並分解, 得

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(-x^2 + 1)$$

第一類: $f' = 0$, 亦相當於

$$x^2(-x^2 + 1) = 0$$

得

$$x = -1,\ 0,\ 1$$

(ii) 求 f'' 在 (i) 中第一類臨界數的值. 首先,

$$f''(x) = -60x^3 + 30x$$

接著,

$$\begin{aligned} f''(-1) &= -60(-1)^3 + 30(-1) \\ &= 30 > 0 \end{aligned}$$

上凹, 故在 $x = -1$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f(-1) &= -3(-1)^5 + 5(-1)^3 \\ &= 3 - 5 = -2 \end{aligned}$$

又

$$f''(1) = -60 + 30 = -30 < 0$$

下凹, 故在 $x = 1$ 有相對極大值

$$f(1) = -3 + 5 = 2$$

最後,

$$f''(0) = 0$$

無法判斷, 故需根據一階導函數檢定法, 得 f' 在 $x = 0$ 左右二個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-1, 0)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

$(0,1)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

故在 $x = 0$ 無相對極值.

四. 凹性的應用

設函數

$$y = f(x)$$

且圖形如下, 其中橫軸的 x 值表示輸入 (input), 單位爲 "元"; 縱軸的 y 表示輸出 (output), 單位爲 "元".

經觀察後, 得

(1) 當 $x < c$ 時, 每多增加一元的輸入, 後面的輸出會大於前面的輸出, 亦即, y' 遞增, 且圖形呈現出上凹.

(2) 當 $x > c$ 時, 每多增加一元的輸入, 後面的輸出會小於前面的輸出, 亦即, y' 遞減, 且圖形呈現出下凹.

(3) 點 $(c, f(c))$ 是一種由上凹變爲下凹的反曲點.

(4) 整個圖形呈現出所謂的 "S" 型圖形.

上述的觀察結論, 在經濟學上乃表示

(1) 在 (a, c) 內多投資是好的.

(2) 在 (c, b) 內多投資是不好的.

(3) 點 $(c, f(c))$ 爲一報酬衰退點 (point of diminishing returns), 也就是一個由上凹轉爲下凹的反曲點.

例 5. 設增加 x 元的廣告費後, 銷售量 y 會以模型

$$y = \frac{1}{10000}(300x^2 - x^3),\ 0 \le x \le 200$$

的方式增加. 試求此產品的報酬衰退點.

<解> 根據報酬衰退點的定義, 原問題乃相當於求由上凹變爲下凹的反曲點. 首先,

$$y' = \frac{1}{10000}(600x - 3x^2)$$

且

$$y'' = \frac{1}{10000}(600 - 6x)$$

由此得反曲候選數

$$x = 100 \in [0, 200]$$

乃第一類反曲候選數.

又 y'' 的符號圖如下述.

$(0, 100)$: $y'' = (+)$, 上凹, y' 遞增.

$(100, 200)$: $y'' = (-)$, 下凹, y' 遞減.

因此, 在 $x = 100$ 的附近, 由上凹變為下凹, 亦即, 當 $x = 100$ 時, 有一報酬衰退點.